はじめに

こんにちは。数学担当の大辻です。
この授業では中学数学の難問に挑戦していきます。

・　数学が得意
・　学校の授業では物足りない
・　もっと難しい問題に挑戦したい
・　難関校が第一志望

といった人にフィットした授業となっています。「まだまだ数学は得意ではないけど，これからレベルアップしていきたい」という人も是非，挑戦してください。

みなさんは何かに悩んでいるとき，問題を抱えているとき，モヤモヤしているときにある種の「ひらめき」で悩みが解消したり，問題が解決した経験はありませんか。問題が解決したとき，人はとても「スッキリした感覚」に包まれます。その「スッキリ感」は問題が大きければ大きいほど喜ばしいものです。

数学の「解けた！」という喜びも同じです。難しい問題に挑戦したときこそ，解けた喜びは大きく，強く印象に残ります。そして，その蓄積が次の問題を解くエネルギーとなっていくのです。「問題が難しいな」と感じたときこそがチャンスです。その問題を理解したとき，解けたときに数学の力がぐんと伸びるでしょう。

私は普段，隠岐という離島に住んでいます。みなさんと直接お会いする機会はなかなかありませんが，こうしてインターネットを通して授業をすることができることを非常に光栄に思います。授業でお会いできるのを楽しみにしています。

大辻 雄介

目　　次

第１章　式の計算

第１講　式の計算①　式の展開……4
第２講　式の計算②　式の展開と素因数分解……10
第３講　式の計算③　因数分解……16
第４講　式の計算④　複雑な因数分解……22
第５講　式の計算⑤　展開・因数分解の利用……28

第２章　平方根

第６講　平方根①　平方根……34
第７講　平方根②　平方根の計算……40
第８講　平方根③　式の値……46

第３章　二次方程式

第９講　二次方程式①　因数分解・平方完成で解く方法……52
第10講　二次方程式②　解の公式・方程式の解……58
第11講　二次方程式③　数に関する文章題……64
第12講　二次方程式④　図形に関する問題……70
第13講　二次方程式⑤　点の移動に関する問題……76
第14講　二次方程式⑥　割合に関する文章題……82
第15講　二次方程式⑦　いろいろな二次方程式の文章題……88

第４章　二乗に比例する関数

第16講　二乗に比例する関数①　関数 $y=ax^2$ のグラフと変域……94
第17講　二乗に比例する関数②　関数 $y=ax^2$ の変化の割合……100
第18講　二乗に比例する関数③　文字をつかって座標を表す……106
第19講　二乗に比例する関数④　面積に関する問題……112
第20講　二乗に比例する関数⑤　放物線と直線……118
第21講　二乗に比例する関数⑥　放物線と面積……124

第５章　円周角の定理

第22講　円周角の定理①　中心角と弧・円周角……130
第23講　円周角の定理②　円周角の応用問題……136
第24講　円周角の定理③　円周角の定理の証明問題……142

第６章　相似

第25講　相似①　長さを求める問題……148
第26講　相似②　相似の証明問題……154
第27講　相似③　平行線と線分比……160

第28講　相似④　中点連結定理…… 166
第29講　相似⑤　相似の融合問題…… 172

第７章　三平方の定理

第30講　三平方の定理①　三平方の定理の基本…… 178
第31講　三平方の定理②　特別な直角三角形…… 184
第32講　三平方の定理③　図形の折り返し…… 190
第33講　三平方の定理④　円と三平方の定理…… 196
第34講　三平方の定理⑤　関数と三平方の定理…… 202
第35講　三平方の定理⑥　立体図形と三平方の定理…… 208

第１章　式の計算

第１講・式の計算①　式の展開

要点整理

1　多項式を単項式でわる計算

多項式の各項を単項式でわるか，または，除法を乗法になおして計算する。

2　式の展開

(1)　単項式と多項式，または多項式と多項式の積の形でかかれた式を，単項式の和の形にかき表すことを，もとの式を展開するという。

(2)　乗法公式

公式１　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

公式２　$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

公式３　$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

公式４　$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

●多項式を単項式でわる計算

$$(a+b)\div c=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

①，②

$$(a+b)\div c=(a+b)\times\frac{1}{c}$$

$$=a\times\frac{1}{c}+b\times\frac{1}{c}$$

①，②

●多項式の乗法

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

①，②，③，④

例題 1　次の計算をしなさい。

(1)　$(12xy-9y^2)\div 3y$

(2)　$(6ab^2-4a^2\mathrm{b})\div\left(-\frac{2}{3}ab\right)$

(3)　$(3x-2)(2x+5)$

(4)　$(x+6)(x+8)$

(5)　$(x-3)^2$

(6)　$(x+7)(x-7)$

例題 2　次の計算をしなさい。

(1)　$(a+3)(a-7)-(a-2)^2$

(2)　$4(x+4y)^2-(x+8y)(x-8y)$

例題 3　次の計算をしなさい。

(1)　98×102

(2)　201^2

問題

1−1　次の計算をしなさい。

(1)　$(8a^2+a)\div a$

(2)　$(3x^2y-6xy^3)\div\left(-\dfrac{3}{2}xy\right)$

(3)　$(x+2)(3x-5)$

(4)　$(3x+1)^2$

(5)　$(x-2y)^2+4xy$

(6)　$(x+1)^2-x(x-2)$

(7)　$(x+2)(x-2)-(x-4)(x+3)$

(8)　$(x+3)(x-5)-(x-3)^2$

1−2　$(1-2x+3x^2)(2+x-x^2)$ を展開したときの x^3 の係数を求めよ。

1−3　$2002^2-2001\times2003$ を計算せよ。

＜ *Note* ＞

第１講・確認テスト

［1］　次の計算をしなさい。

（1）　$(-4a^3b^2c+12a^2b^2c^2-8abc^4)\div\left(-\frac{4}{3}ab\right)=$ ア a イ $bc-$ ウ abc エ $+$ オ c カ

（2）　$(x-3y)(2x+y)=$ キ x^2- ク $xy-$ ケ y^2

（3）　$\left(2a+\frac{1}{2}\right)^2=$ コ a^2+ サ $a+\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$

（4）　$\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y\right)=\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}x^2-\frac{\text{タ}}{\text{チツ}}y^2$

（5）　$(a+b)(2a-3b)-(a-4b)(4a-b)=-$ テ a^2+ トナ $ab-$ ニ b^2

（6）　$(x+4)(x-4)+(x+3)(x+5)=$ ヌ x^2+ ネ $x-$ ノ

（7）　$(x+6)(x+9)-(x-2)(x+6)=$ ハヒ $x+$ フヘ

（8）　$(3a-2b)(3a+b)-4(a-2b)^2=$ ホ a^2+ マミ $ab-$ ムメ b^2

［2］　次の モ ，ヤ にあてはまる数を求めなさい。

（1）　$(x^2+ax-2)(2x^2-3x+5)$を展開したとき，x^2の係数が-5となった。このとき，aの値は$a=$ モ である。

（2）　$104\times105-103\times106=$ ヤ である。

< *Note* >

第2講・式の計算②
式の展開と素因数分解

要点整理

1　素因数分解

(1)　自然数が２つ以上の整数(１より大きい)の積の形で表されるとき，その積をつくっている１つ１つの数を**因数**という。

(2)　１とその数自身のほかには約数をもたない数を素数という。1 は**素数**ではない。

(3)　素数である因数を**素因数**といい，自然数を素因数だけの積で表すことを**素因数分解**という。

●素因数分解

①　できるだけ小さい素数から順にわっていく。

②　商が素数になればやめる。

2)60
2)30
3)15
　 5

③　$60=2^2\times3\times5$(同じ素数の積は累乗の指数で表す。)

例題 1　次の問いに答えなさい。

(1)　自然数 x，y において，$120x=y^2$ を満たす最小の y の値を求めよ。

(2)　1350 を自然数 a でわると，わりきれて商はある自然数の 2 乗になる。a のうちで最小のものを求めよ。

例題 2　次の問いに答えなさい。

(1)　18×22 を次のように計算した。p，q にあてはまる自然数を入れよ。

$$18\times22=(p-2)(p+2)=p^2-4=q$$

(2)　3 以上の奇数は，連続する 2 つの自然数の平方の差として表される。次の問いに答えよ。

例　$5=3^2-2^2$

①　9 を，上の例のように，連続する 2 つの自然数の平方の差として表せ。

②　n を 3 以上の奇数とする。n を連続する 2 つの自然数の平方の差として表したとき，この連続する 2 つの自然数のうち小さい方を p として，p を n を用いて表せ。

問題

2-1　xy を $x+y$ と $x-y$ を用いて表せ。

2-2　次の問いに答えなさい。

(1)　48510 をできるだけ小さい自然数でわって，余りがなく，商が自然数の平方になるようにしたい。どんな数でわればよいか。

(2)　2 けたの自然数 x がある。x を 5 でわると 3 余り，$x+1$ はある素数の 2 乗に等しい。自然数 x を求めよ。

< *Note* >

第2講・確認テスト

[1]　$2x^2-xy+2y^2$を$x+y$，xyを用いて表しなさい。

$2x^2-xy+2y^2=$ ア $(x+y)^2-$ イ xy

[2]　次の ウ ～ チ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　57330 をできるだけ小さな自然数でわって，余りがなく，商が自然数の平方になるようにしたい。このとき，わる数は ウエオ である。

(2)　$21a=\dfrac{b^2}{6}$をみたす，最も小さな自然数 a，b の値は，$a=$ カキ ，$b=$ クケ である。

(3)　n を自然数とするとき，次の問いに答えなさい。

①　616 を素因数分解しなさい。

$616=2^{\text{コ}}\times$ サ $\times$ シス

②　$\dfrac{616}{2n+1}$が整数となるような n の値をすべて求めると，小さい順に，$n=$ セ ， ソ ， タチ である。

< *Note* >

第3講・式の計算③ 因数分解

要点整理

1　因数分解の基本

(1)　1つの多項式をいくつかの単項式や多項式の積になおせるとき，そのおのおのの式を，多項式の**因数**という。

(2)　1つの多項式をいくつかの因数の積の形に表すことを，もとの多項式を**因数分解**するという。

(3)　多項式の各項に**共通な因数**がある場合，分配法則を使って，共通な因数をかっこの外にくくり出すことができる。

(4)　乗法公式をもとにする因数分解

公式1′　$\boldsymbol{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$

公式2′　$\boldsymbol{x^2+2ax+a^2=(x+a)^2}$

公式3′　$\boldsymbol{x^2-2ax+a^2=(x-a)^2}$

公式4′　$\boldsymbol{x^2-a^2=(x+a)(x-a)}$

2　一般的な因数分解の手順

①　各項に共通な因数があればくくり出す。

②　直接乗法公式が使えるかどうか調べる。

③　直接公式が使えない場合は，1つの文字について整理したり，項を適当に組み合わせて，その部分について因数分解をしたりして，上の①，②を行う。

④　因数分解は，それ以上因数分解できないところまで行う。

●因数分解と展開とは，逆の式変形

x^2+3x+2 →(因数分解)→ $(x+1)(x+2)$

$(x+1)(x+2)$ →(展開)→ x^2+3x+2

●共通な因数

$ma+mb=m(a+b)$

(共通因数) m を　くくり出す

●乗法公式を逆に見る

$x^2+⑤x+\boxed{6}=(x+2)(x+3)$

積が6になる2数

和が5になる2数

例題 1　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$9xy^2-12x^2y+3xy$　(2)　$a^2-4a-45$　(3)　$x^2-12xy+36y^2$

(4)　$81a^2-25b^2$　(5)　$3ax^2-36axy+96ay^2$　(6)　$(x+1)(x-3)-5$

例題 2　次の計算をしなさい。

(1)　53^2-47^2　(2)　$22^2+2\times22\times28+28^2$

問題

3－1　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$3x^2-6xy-45y^2$　(2)　$2am^2-6am+4a$　(3)　$m(x^2-6)+mx$

(4)　$2a^2b+8ab+8b$　(5)　$2a^2c^2-18b^2$　(6)　$(x-5)^2-4$

(7)　$x(x+2)-15$　(8)　$(a-b)(a+2b)-4b^2$　(9)　$3x(x+1)-(2x-1)(x+3)-6$

3－2　$51\times51+49\times49-2\times51\times49$ を計算せよ。

＜ *Note* ＞

第３講・確認テスト

[1]　次の式を因数分解しなさい。

（1）$12a^3bc-18ab^3c+24abc^3$

$=$ ア $abc($ イ $a^{ウ}-$ エ $b^{オ}+$ カ $c^{キ})$

（2）$-3a^2-12a+15=-$ ク $(a+$ ケ $)(a-$ コ $)$

（3）$3ax^2-6ax-24a=$ サ $a(x+$ シ $)(x-$ ス $)$

（4）$2x^3-12x^2y+18xy^2=$ セ $x(x-$ ソ $y)^{タ}$

（5）$\frac{1}{16}x^2y^2-\frac{4}{9}z^2=\left(\frac{チ}{ツ}xy+\frac{テ}{ト}z\right)\left(\frac{チ}{ツ}xy-\frac{テ}{ト}z\right)$

（6）$(a-2)^2-36=(a+$ ナ $)(a-$ ニ $)$

（7）$(x-3y)(x+5y)-9y^2=(x+$ ヌ $y)(x-$ ネ $y)$

（8）$2(x+2)(x-4)-(x-1)^2+2=(x+$ ノ $)(x-$ ハ $)$

[2]　$101^2-98\times103+99\times98-97^2$ を計算すると，その値は ヒフヘ である。

< *Note* >

第４講・式の計算④ 複雑な因数分解

要点整理

1　複雑な因数分解を考える順序

(1)　共通因数がないか調べる

(2)　公式をつかえないか考える

(3)　１つの文字について式を整理する

　　カタマリを見つけて考える

例題 1　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$ab-2a-3b+6$

(2)　$x^2-6x+9-9y^2$

(3)　$a^2-b^2+4bc-4c^2$

(4)　$xy+2yz-xz-y^2-z^2$

(5)　x^2-x-y^2+y

(6)　$x^2+2xy+y^2-2x-2y+1$

例題 2

同じ大きさの正方形のタイルが，ある長方形の床にすき間なくしきつめられている。この床の縦には偶数枚のタイルが，横には縦より2枚多い数のタイルが並べられている。しきつめられているタイルの枚数より1枚多い数のタイルを全部使って，ある正方形の床にしきつめていくと，タイルが1辺に奇数枚並ぶようにすき間なくしきつめることができる。このわけを文字式を使って説明せよ。

問題

4−1　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$4x^2-y^2+2y-1$

(2)　x^2-4y^2+8y-4

(3)　$a^2-ab+2a+b-3$

(4)　a^2-ac-b^2+bc

(5)　$x^2y^2-4x^2-y^2+4$

(6)　$x^2-4xy+4y^2+x-2y-2$

4−2

x^2+nx+6 が $(x+a)(x+b)$ の形に因数分解できるような正の整数 n は全部で何個あるか。ただし，a，b は整数とする。

＜ *Note* ＞

第4講・確認テスト

［1］　次の式を因数分解しなさい。

（1）　$xy+2x-3y-6=(x-$ ア $)(y+$ イ $)$

（2）　$a^2+9b^2-6ab-16=(a-$ ウ $b+$ エ $)(a-$ オ $b-$ カ $)$

（3）　$9a^2-16b^2+40b-25$

$=($ キ $a+$ ク $b-$ ケ $)($ キ $a-$ ク $b+$ ケ $)$

（4）　$4x^2-4x-9y^2-6y=($ コ $x+$ サ $y)($ シ $x-$ ス $y-$ セ $)$

（5）　$a^2+2ab-2a-14b-35=(a-$ ソ $)(a+$ タ $b+$ チ $)$

（6）　$9x^2-12xy+4y^2-3x+2y-6$

$=($ ツ $x-$ テ $y+$ ト $)($ ナ $x-$ ニ $y-$ ヌ $)$

［2］　次の問いに答えなさい。

（1）　$a^2-b^2=27$ となる自然数 a，b の値は，$(a, b)=($ ネ ， ノ $)$，($ ハヒ ， フヘ)である。

（2）　$a^3-4a=315$ となる自然数 a は，$a=$ ホ である。

< *Note* >

第５講・式の計算⑤ 展開・因数分解の利用

要点整理

１　倍数になることの説明問題

たとえば３の倍数であることを説明する

・数を文字でおく

・文意にしたがって式変形(展開･因数分解)する

・３×(整数)であることを示す

２　式の値を求める問題

式を簡単にしてから数を代入する

例題 1　次の問いに答えなさい。

(1)　連続した2つの奇数の平方の差は，8の倍数になることを証明しなさい。

(2)「連続する3つの整数において，最も大きい整数とまん中の整数の積から最も小さい整数の2乗をひいた数に1をたした数は,3でわりきれる」ことを証明せよ。ただし，最も小さい整数を n とする。

例題 2　次の問いに答えなさい。

(1)　$a=1.5$，$b=8.5$ のとき，$a^2+2ab+b^2$ の値を求めよ。

(2)　$x+y=-3$，$x-y=5$ のとき，$3x^2-3y^2$ の値を求めよ。

問題

5−1　連続した３つの奇数の２乗の和に１を加えた数は，12 の倍数であることを証明しなさい。

5−2　次の問いに答えなさい。

(1)　$x=1.73$，$y=0.27$ のとき，$x^2+y^2+2xy-x-y$ の値を求めよ。

(2)　$a-b=1$ のとき，$a^2-3a+b^2+3b-2ab+3$ の値を求めよ。

＜ *Note* ＞

第5講・確認テスト

[1]　連続する3つの整数において，最小の数の平方と中央の数の平方の和に4を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，ある整数の平方となることを，次のように証明した。このとき，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ にあてはまる数を求めなさい。

$\boxed{\text{証明}}$　連続する3つの整数の中央の数を n とすると，最小の数は $n-\boxed{\text{ア}}$，最大の数は $n+\boxed{\text{イ}}$ と表される。

最小の数の平方と中央の数の平方の和に4を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，

$(n-\boxed{\text{ア}})^2+n^2+4-(n+\boxed{\text{イ}})^2$

$=n^2-\boxed{\text{ウ}}\,n+\boxed{\text{エ}}+n^2+4-(n^2+\boxed{\text{オ}}\,n+\boxed{\text{カ}})$

$=n^2-\boxed{\text{キ}}\,n+\boxed{\text{ク}}$

$=(n-\boxed{\text{ケ}})^2$

よって，連続する3つの整数において，最小の数の平方と中央の数の平方の和に4を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，ある整数の平方となる。

[2]　次の $\boxed{\text{コ}}$ ～ $\boxed{\text{ハ}}$ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　$x=1.57$，$y=0.19$ のとき，$x^2-6xy+9y^2-x+3y+1$ の値を因数分解を利用して求めると，$x^2-6xy+9y^2-x+3y+1=(x-\boxed{\text{コ}}\,y)(x-\boxed{\text{コ}}\,y-1)+1$

$=\boxed{\text{サ}}\times\boxed{\text{シ}}+1$

$=\boxed{\text{ス}}$

(2)　$a+b=1$，$ab=-3$ のとき，$a^2b^3+a^3b^2$ の値を因数分解を利用して求めると，

$a^2b^3+a^3b^2=a^{\boxed{\text{セ}}}b^{\boxed{\text{ソ}}}(b+a)$

$=(-\boxed{\text{タ}})^{\boxed{\text{チ}}}\times\boxed{\text{ツ}}$

$=\boxed{\text{テ}}$

(3)　$a-b=-4$ のとき，$a^2-2ab+b^2-5a+5b-6$ の値を因数分解を利用して求めると，

$a^2-2ab+b^2-5a+5b-6=(a-b+\boxed{\text{ト}})(a-b-\boxed{\text{ナ}})$

$=(-\boxed{\text{ニ}})\times(-\boxed{\text{ヌネ}})$

$=\boxed{\text{ノハ}}$

< *Note* >

第２章　平方根

第６講・平方根①
平方根

要点整理

1　平方根

(1)　２乗する（平方する）と a（$a \geqq 0$）になる数を，a の**平方根**という。すなわち，$x^2=a$ にあてはまる x の値が，a の平方根である。

(2)　正の数 a の平方根は２つあり，絶対値が等しく，符号が異なる。

a の２つの平方根のうち，正の方を $\sqrt{a}$，負の方を $-\sqrt{a}$ と表す。記号 $\sqrt{}$ を**根号**といい，$\sqrt{a}$ は「**ルート a**」と読む。

(3)　０の平方根は０だけであり，また，負の数には，その平方根はない。

(4)　$a>0$ のとき，

$(\sqrt{a})^2=a$，$(-\sqrt{a})^2=a$，

$\sqrt{a^2}=a$，$\sqrt{(-a)^2}=a$

●**平方根**

$a>0$ のとき，

a —平方根を求める→ $\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$

$\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$ —２乗する（平方する）→ a

例題 1　次の問いに答えなさい。

(1)　$\sqrt{90x}$ が整数になるような最小の正の整数 x を求めなさい。

(2)　$\sqrt{\dfrac{525}{a}}$ が整数になる自然数 a のうち，最小のものを求めよ。

例題 2　次の問いに答えなさい。

(1)　$\sqrt{10-n}$ の値が整数となるような，自然数 n は何個あるか。

(2)　$\sqrt{40-2n}$ が整数となるような自然数 n をすべて求めよ。

問題

6－1　n を自然数とする。$\sqrt{\dfrac{224n}{135}}$ が分母と分子がともに自然数である分数となる最も小さい n の値を求めよ。

6－2　$\sqrt{120n}$ が整数となるような正の整数 n のうち，4 番目に小さいものを求めよ。

< *Note* >

第６講・確認テスト

［1］　次の ア ～ ク にあてはまる数を求めなさい。

（1）　$\sqrt{540n}$ が整数になる自然数 n を小さい順に３つ求めると，$n=$ アイ ，ウエ ，オカキ である。

（2）　$\sqrt{\dfrac{2520}{n}}$ が整数になる自然数 n の値の個数は ク 個である。

［2］　次の ケ ～ ツ にあてはまる数を求めなさい。

（1）　$\sqrt{135-9n}$ が整数となる自然数 n を小さい順にすべて求めると，$n=$ ケ ，コサ ，シス ，セソ である。

（2）　$\sqrt{n^2+35}$ が整数となる自然数 n の値をすべて求めると，$n=$ タ ，チツ である。

< *Note* >

第７講・平方根②　平方根の計算

要点整理

1　平方根の大小

$a>0$，$b>0$ のとき，$a<b$ ならば，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$

2　平方根の計算

(1)　乗法・除法

$a>0$，$b>0$ のとき，

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$$

(2)　加法・減法

$a>0$ のとき，

$$m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$$

$$m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$$

●分母に根号をふくまない形への変形

分母，分子に，分母の数（$\sqrt{b}$）をかける。

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

●平方根の計算（加法・減法）

根号の中の数が同じものは，文字式の同類項と同じように，まとめて簡単にすることができる。

［平方根］$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}$

［文字式］$2a+5a=(2+5)a$

●平方根のいろいろな計算

分配法則や乗法公式を利用する。

$(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}+5)$

$=(\sqrt{2})^2+(3+5)\sqrt{2}+3\times5$

$=17+8\sqrt{2}$

例題 1　次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{15} \div \sqrt{6} \times 3\sqrt{20}$　(2) $\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{50}$　(3) $\dfrac{\sqrt{96}}{2} - \dfrac{6}{\sqrt{6}}$

(4) $\sqrt{6}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$　(5) $(\sqrt{5} - 4)(\sqrt{5} - 8)$　(6) $(3\sqrt{3} + 2\sqrt{7})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7})$

例題 2　次の計算をしなさい。

(1) $\sqrt{24} + \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \dfrac{24}{\sqrt{6}}$　(2) $(2\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 - \dfrac{8}{\sqrt{2}}$

(3) $(\sqrt{8} + 3\sqrt{3})(2\sqrt{2} - \sqrt{27}) - (\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 8)$　(4) $6\sqrt{\dfrac{5}{9}} - \dfrac{20 - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - (1 + \sqrt{5})^2$

問題

7−1　次の計算をしなさい。

(1)　$\sqrt{27}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}-\dfrac{5\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-\dfrac{18}{\sqrt{3}}$

(2)　$(\sqrt{5}+2)^2-\dfrac{10}{\sqrt{5}}$

(3)　$(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}+5)-\dfrac{4}{\sqrt{8}}$

(4)　$(2\sqrt{3}-3)(2+\sqrt{3})-\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

(5)　$(\sqrt{5}-1)^2-(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$

(6)　$(3+2\sqrt{6})\div\sqrt{3}+(1-\sqrt{2})^2$

＜ *Note* ＞

第７講・確認テスト

[1]　次の計算をしなさい。

(1)　$\sqrt{27}\times\sqrt{80}\div\sqrt{6}\div3\sqrt{2}=$ ア $\sqrt{\text{イ}}$

(2)　$\sqrt{8}-\dfrac{4}{3\sqrt{2}}+\sqrt{18}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{\text{ウエ}\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$

(3)　$\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{8})-\dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}=-$ キ $+$ ク $\sqrt{\text{ケ}}$

(4)　$(\sqrt{10}-\sqrt{5})^2-\dfrac{6}{\sqrt{2}}=$ コサ $-$ シス $\sqrt{\text{セ}}$

(5)　$(\sqrt{15}-1)^2-(\sqrt{5}+\sqrt{12})^2=-$ ソ $-$ タ $\sqrt{\text{チツ}}$

(6)　$(2\sqrt{5}-3)(\sqrt{20}+3)-(\sqrt{3}-5\sqrt{2})(\sqrt{3}+3\sqrt{2})=$ テト $+$ ナ $\sqrt{\text{ニ}}$

(7)　$\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{4-\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=$ ヌ $+$ ネ $\sqrt{\text{ノ}}$ $-$ ハ $\sqrt{\text{ヒ}}$

(8)　$(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3}-2)=$ フ $-$ ヘ $\sqrt{\text{ホ}}$ $+$ マ $\sqrt{\text{ミ}}$

< *Note* >

第8講・平方根③ 式の値

要点整理

1　式の値

対称式は基本対称式 $x+y$, xy をつかって表すことができる。

例）$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

これを用いて式の値を求める。

2　平方根の大小関係

$a>b$ ならば　$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

これを用いて $\sqrt{5}$ の整数部分を考えると,

$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$　すなわち　$2<\sqrt{5}<3$

だから,

$\sqrt{5}$ の整数部分は 2 とわかる。

例題 1　次の問に答えなさい。

(1)　$x=3+2\sqrt{2}$，$y=3-2\sqrt{2}$のとき，x^2+xy+y^2の値を求めなさい。

(2)　$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$のとき，$\dfrac{x^2+y^2}{xy}$の値を求めよ。

例題 2

$\dfrac{1}{3}$，$\sqrt{0.3}$，0.3 を小さい方から順に並べよ。

例題 3

$\sqrt{2}$の小数部分を a とするとき，a^2+2a-4 の値を求めよ。

問題

8－1　次の問いに答えなさい。

(1)　$x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$のとき，$x^2+3xy+y^2$ の値を求めよ。

(2)　$a+b=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$a-b=\sqrt{6}-2$ のとき，$(2a-b)^2-(a-2b)^2$ の値を求めよ。

8－2　次の 4 つの数を大きいものから順に並べよ。

$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$，$\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

8－3　$\sqrt{10}-\sqrt{2}$の整数部分を x，小数部分を y とおくとき，$2x^2+2xy+y^2$ の値を求めよ。

＜ *Note* ＞

第８講・確認テスト

[1]　$x=\sqrt{7}-\sqrt{5}$，$y=\sqrt{7}+\sqrt{5}$のとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　$\dfrac{x-y}{xy}=-\sqrt{\boxed{ア}}$

(2)　$x^2y+xy^2=\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}$

(3)　$x^2-y^2=-\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オカ}}$

(4)　$x^2+y^2=\boxed{キク}$

[2]　$a=2+3\sqrt{2}$，$b=-1+\sqrt{2}$のとき，次の式の値を求めなさい。

$a^2-6ab+9b^2=\boxed{ケコ}$

[3]　次の$\boxed{サ}$～$\boxed{ス}$にあてはまる数を番号で答えなさい。

次の５つの数の大小を比べると，最も大きい数は$\boxed{サ}$，最も小さい数は$\boxed{シ}$で，大きい方から３番目の数は$\boxed{ス}$である。

①　$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　②　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③　$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　④　$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　⑤　$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

[4]　次の$\boxed{セ}$～$\boxed{テ}$にあてはまる数を求めなさい。

(1)　$3\sqrt{7}$の小数部分をx，整数部分をyとすると，

$x=\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}-\boxed{タ}$，$y=\boxed{チ}$である。

(2)　$\sqrt{3}+1$の整数部分をa，小数部分をbとすると，$a^2+4ab+4b^2$の値は$\boxed{ツテ}$である。

< *Note* >

第3章　二次方程式

第9講・二次方程式①　因数分解・平方完成で解く方法

要点整理

1　二次方程式

移項して整理すると，$ax^2+bx+c=0$（a，b，c は定数，$a \neq 0$）の形で表される方程式を，x についての**二次方程式**という。

この二次方程式を成り立たせる x の値を，その二次方程式の**解**といい，解をすべて求めることを，その**二次方程式を解く**という。

2　二次方程式

(1)　因数分解による解き方

二次方程式 $x^2+bx+c=0$ の左辺を因数分解して，$(x+m)(x+n)=0$ となれば，$x+m=0$ または $x+n=0$，よって，$x=-m$，$-n$

(2)　平方根を利用した解き方

①　二次方程式 $ax^2-b=0$ を $x^2=\dfrac{b}{a}$ と変形して，x は $\dfrac{b}{a}$ の平方根になるから，$x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

②　二次方程式 $(x+m)^2=n$ についても，$x+m$ は n の平方根になるから，$x+m=\pm\sqrt{n}$ より，$x=-m\pm\sqrt{n}$

③　二次方程式 $x^2+bx+c=0$ の左辺が因数分解できないときは，$(x+m)^2=n$ の形に変形して解く。

●平方根を利用した解き方

①　$ax^2-b=0$ のとき，

$x^2=\dfrac{b}{a}$ より，$x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

②　$(x+m)^2=n$ のとき，

$x+m=\pm\sqrt{n}$ より，

$x=-m\pm\sqrt{n}$

③　$x^2+bx+c=0$ の左辺が因数分解できないとき，$(x+m)^2=n$ の形に変形する。

$x^2+6x-2=0$ を $(x+m)^2=n$ の形に変形するには，

定数項を移項して，

$x^2+6x=2$

両辺に，x の係数 6 の半分の 2 乗を加えて，

$x^2+6x+3^2=2+3^2$

$(x+3)^2=11$

次の方程式を解きなさい。

(1)　$x^2+x-30=0$

(2)　$(x-3)^2=16$

例題 1　次の方程式を解きなさい。

(1)　$x^2+4x=0$　(2)　$x^2-4x-60=0$　(3)　$4x^2+12x+9=0$

(4)　$2x^2-5=0$　(5)　$(x+1)^2-25=0$　(6)　$4(x-2)^2-49=0$

例題 2　次の方程式を解きなさい。

(1)　$x^2-6x+4=0$　(2)　$x^2+4x+2=0$　(3)　$x^2-8x+9=0$

問題

9-1　次の方程式を解きなさい。

(1)　$(x+2)(x-1)=2x+4$

(2)　$2x^2-6x=45-x^2$

(3)　$(2x+1)^2=12x+1$

(4)　$4(x+1)(x-2)=3x(x-1)-x$

＜ *Note* ＞

第９講・確認テスト

［1］　次の方程式を解きなさい。

（1）　$4x^2=5x$　　　$x=$ ア ，$\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$

（2）　$4x^2-12x+9=0$　　　$x=\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}}$

（3）　$x^2+10x=2$　　　$x=-$ カ $\pm$ キ $\sqrt{\text{ク}}$

（4）　$x^2-3x-1=0$　　　$x=\dfrac{\text{ケ}\pm\sqrt{\text{コサ}}}{\text{シ}}$

（5）　$(x-1)(x-2)=6$　　　$x=$ ス ，$-$ セ

（6）　$(x-2)^2+5(x-2)=0$　　　$x=$ ソ ，$-$ タ

（7）　$(2x+3)(x-1)=-3x+3$　　　$x=$ チ ，$-$ ツ

（8）　$(2x-1)^2-21=3(x-3)(x+2)$　　　$x=$ テ ，$-$ ト

< *Note* >

第10講・二次方程式②　解の公式・方程式の解

要点整理

1　解の公式

二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となる。

2　方程式の解

解をもとの方程式に代入すると成立する。

例題 1　次の方程式を解きなさい。

(1)　$x^2-10x+4=0$　　(2)　$x^2+5x-2=0$

例題 2　次の問いに答えなさい。

(1)　x についての二次方程式 $x^2+4ax+a^2+3=0$ の1つの解が1であるとき，もう1つの解を求めよ。

(2)　x の二次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が1，2のとき，x の二次方程式 $x^2+bx+a=0$ を解け。

問題

10−1　次の問いに答えなさい。

(1)　二次方程式 $x^2+ax+b=0$ の２つの解が，二次方程式 $x^2-20x+91=0$ の２つの解よりそれぞれ３だけ小さいとき，a，b の値を求めよ。

(2)　二次方程式 $x^2-10x+7=0$ の２つの解を a，b とするとき，a および a^2b-ab^2 の値を求めよ。ただし，$a>b$ とする。

(3)　二次方程式 $x^2+ax+a=0$ の解がただ１つしかないとき，a の値を求めよ。

＜ *Note* ＞

第10講・確認テスト

[1]　次の方程式を解きなさい。

(1)　$x^2+5x+3=0$　　$x=\dfrac{-\boxed{ア}\pm\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$

(2)　$x^2-3x-2=0$　　$x=\dfrac{\boxed{オ}\pm\sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{ク}}$

(3)　$x^2-2x-5=0$　　$x=\boxed{ケ}\pm\sqrt{\boxed{コ}}$

(4)　$2x^2-3x-5=0$　　$x=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$，$-\boxed{ス}$

[2]　次の $\boxed{セ}$ ～ $\boxed{ナ}$ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　二次方程式 $x^2+(a-3)x-2a+2=0$ の解の１つが６であるとき，$a=-\boxed{セ}$ であり，他の解は $\boxed{ソ}$ である。

(2)　二次方程式$x^2+ax+b=0$ の２つの解が，二次方程式 $x^2-3x-18=0$ の２つの解のそれぞれ２倍であるとき，$a=-\boxed{タ}$，$b=-\boxed{チツ}$ である。

(3)　二次方程式 $x^2-4x-1=0$ の２つの解を p，q とするとき，$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}=-\boxed{テト}$ である。

(4)　二次方程式 $x^2+ax+12=0$ の２つの解がともに整数となるような a の値は，全部で $\boxed{ナ}$ 個である。

< *Note* >

第11講・二次方程式③ 数に関する文章題

要点整理

1　二次方程式を利用して応用問題を解く手順

①　問題文をよく読み，図や表を書いたりして問題の数量関係を調べる。

②　求める数，または，それに関連のある数を x とおく。

③　問題の数量関係を，x を使って方程式で表す。

④　その方程式を解く。

⑤　二次方程式では，ふつう，解が２個出てくるので，その解が問題に適しているかどうかを必ず調べて，適しているものを答えとする。

例題 1

次の問いに答えなさい。

(1)　ある正の数の平方は，もとの数の３倍より28大きいという。もとの数を求めなさい。

(2)　正の数と負の数があり，その差は７で，負の数の２乗は正の数の２倍より６小さい。もとの２数を求めよ。

例題 2

ある数 x に 4 を加えて 2 乗した数は，x を 2 乗して 2 倍した数から 4 をひいた数に等しい。ある数 x を求めよ。ただし，ある数 x は正の数とする。

例題 3

次の問いに答えなさい。

(1)　連続する 2 つの自然数の平方の和が 145 となるとき，この連続する 2 つの自然数を求めよ。

(2)　連続する 3 つの正の奇数がある。この 3 つの奇数の平方の和が，最小の奇数と最大の奇数の積の 4 倍より 57 小さくなるとき，もとの 3 つの奇数を求めなさい。

問題

11－1

大小2つの自然数がある。その差は3で，積は54である。2つの自然数を求めなさい。

11－2

ある正の数aに2をたしてから2乗して3を加えるところを，2をたしてから2倍して3を加えたため，求める数より15少なかった。もとの正の数aを求めよ。

11－3

連続する2つの正の奇数の積が9999であるとき，この2つの奇数を求めよ。

＜ *Note* ＞

第11講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

(1)　ある自然数 x の平方から8をひいた数は，x に8を加えて2倍した数に等しい。このとき，$x=$ **ア** である。

(2)　ある自然数から5をひいて2乗するところを，ある数に5をたして2倍したため，正しい答えより4小さくなった。このとき，ある自然数は **イ** ，または **ウエ** である。

(3)　大小2つの自然数があり，それらの和は25，平方の和は397である。このとき，大きい方の自然数は **オカ** ，小さい方の自然数は **キ** である。

［2］　連続する3つの整数があり，最大の数の平方は，他の2つの数の積の2倍より31小さい。このとき，これら3つの整数のうちで最大の数は **ク** ，または－ **ケ** である。

［3］　連続する3つの奇数があり，小さい方の2つの数の平方の和から最大の数の平方をひくと，これら3つの奇数の和の3倍に等しくなる。このとき，これら3つの奇数のうちで最小のものは **コサ** である。

< *Note* >

第１２講・二次方程式④ 図形に関する問題

要点整理

１　長方形の周りの長さの問題

$a$cmのひもをつかって長方形をつくるとき･･･たての長さと横の長さの和は $\frac{a}{2}$cm

２　ふたのない容器をつくる問題

きりとった四隅の正方形の一辺が，できあがる容器の高さになる。

３　道はばの問題

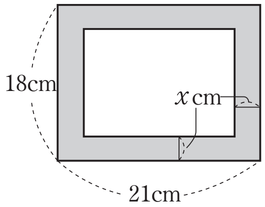
道をはじに寄せて考える。

例題 1

次の問いに答えなさい。

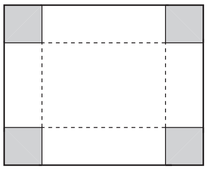
⑴　長さ 48cm のひもで長方形をつくり，その面積が 135cm^2 になるようにしたい。この長方形の縦の長さを求めよ。ただし，縦の長さは横の長さより短いものとする。

⑵　縦 18cm，横 21cm の長方形の紙がある。右の図のように，4 つの辺にそって $x$cm の幅で切り落としたら，長方形の面積は 180cm^2 になった。x の値を求めなさい。



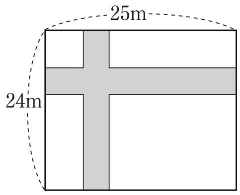
例題 2

右の図は，横が縦より 4cm 長い長方形の紙である。この紙の4すみから1辺が 4cm の正方形を切り取り，直方体の容器をつくると，容積が 384cm^3 になった。もとの長方形の縦の長さを求めなさい。



例題 3

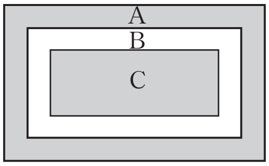
縦が 24m，横が 25m の長方形の土地に，右の図のように，縦，横に同じ幅の道をつけた。道を除いた土地の面積はもとの土地の面積の 70%になった。このときの道幅を求めよ。



問題

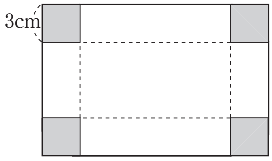
12-1

図のように，青と白の2種類のタイルが長方形の床に敷きつめてある。このタイルは，同じ大きさの正方形で，その個数は全部で325個ある。Aの部分には青タイルが1列，Bの部分には白タイルが1列，Cの部分には横が縦より12個多く青タイルが敷いてある。青タイルは何個あるか。



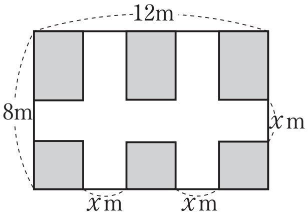
12-2

縦と横の長さの比が2：3の長方形の厚紙がある。右の図のように，この厚紙の4すみから1辺が3cmの正方形を切り取り，直方体の容器をつくると，容積は360cm^3になった。はじめの厚紙の縦の長さを求めよ。求め方も書け。



12-3

縦8m，横12mの長方形の土地がある。右の図のように，縦に2本，横に1本の同じ幅の道をつくり，残りの部分を花だんにすることにした。花だんの面積と道の面積が同じになるようにするには，道の幅を何mにすればよいか。



< *Note* >

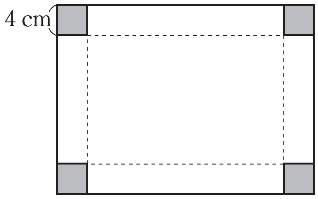
第12講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

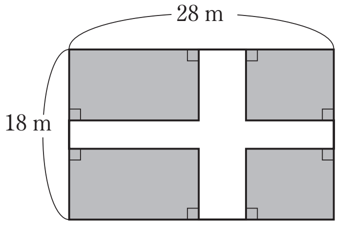
(1)　１辺の長さの和が25cmの２つの正方形の面積の和が317cm^2のとき，大きい方の正方形の１辺の長さは［アイ］cmである。

(2)　縦の長さと横の長さの比が１：２の長方形がある。この長方形の縦の長さを4cm長くし，横の長さを6cm短くして新しい長方形をつくったところ，面積が288cm^2になった。もとの長方形の縦の長さは［ウエ］cm，横の長さは［オカ］cmである。

［2］　横が縦より9cm長い長方形の厚紙がある。右の図のように，この厚紙の４すみから，１辺が4cmの正方形を切り取り，折り曲げて直方体の容器をつくったところ，容積が1768cm^3になった。このとき，はじめの厚紙の縦の長さは［キク］cm，横の長さは［ケコ］cmである。



［3］　縦18m，横28mの長方形の土地がある。右の図のように，長方形の辺に垂直になるように，縦と横に１本ずつ道をつくったところ，道以外の部分の面積が345m^2になった。縦の道の幅が横の道の幅より2m広いとき，縦の道の幅は［サ］mである。



< *Note* >

第13講・二次方程式⑤ 点の移動に関する問題

要点整理

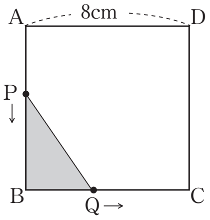
1　点の移動に関する問題

・辺の長さと点の移動距離の差を利用する。

・移動する点が頂点を通過したあとの図形の変化に注目する。

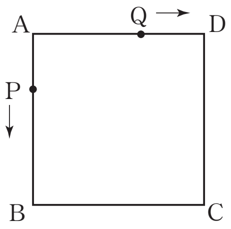
例題 1

右の図のような正方形ABCDで，点PはAを出発してAB上をBまで動く。また，点Qは点PがAを出発すると同時にBを出発し，Pと同じ速さでBC上をCまで動く。点PがAから何cm動いたとき，△PBQの面積が$6cm^2$になるか，求めなさい。



例題 2

右の図は，1辺6cmの正方形ABCDである。点Pは頂点Aを出発し毎秒1cmの速さで反時計回りに，点Qは頂点Aを出発し毎秒2cmの速さで時計回りに，ともに辺上を動く。2点P，Qが点Aを同時に出発してからx秒後について，次の問いに答えよ。ただし，xの変域は$0 \leqq x \leqq 6$とする。



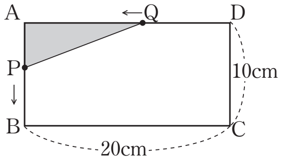
(1)　点Qが辺AD上にあるとき，△CPQの面積をxを用いて表せ。

(2)　△CPQの面積が$14cm^2$となるxの値をすべて求めよ。

問題

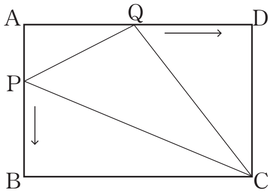
13－1

右の図のような，BC＝20cm，CD＝10cm の長方形 ABCD がある。点 P は A を出発して AB 上を B まで動く。また，点 Q は点 P が A を出発すると同時に D を出発し，P の 2 倍の速さで AD 上を A まで動く。点 P が A から何 cm 動いたとき，△ APQ の面積が $24cm^2$ になるか，求めなさい。



13－2

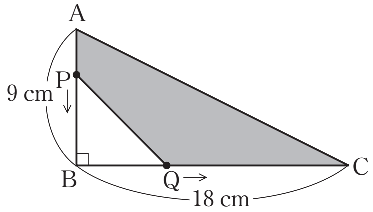
右の図は，AB＝4cm，AD＝6cm の長方形である。点 P，Q は頂点 A を同時に出発し，長方形の周上を，点 P は毎秒 1cm，点 Q は毎秒 2cm の速さで，それぞれ矢印の向きに，x 秒間動くものとする。$0<x\leqq3$ のとき，3 点 C，P，Q を直線で結んでできる△ CPQ の面積が $10cm^2$ になるのは何秒後か。



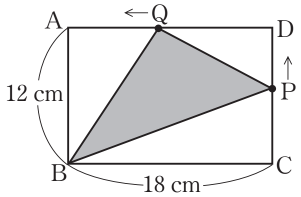
＜ *Note* ＞

第13講・確認テスト

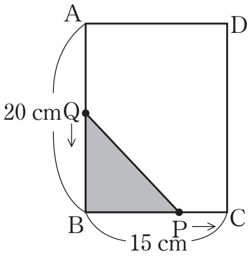
［1］　右の図のような，AB＝9cm，BC＝18cm，∠ABC＝90°の直角三角形ABCがある。点PはAを出発してAB上をBまで，毎秒1cmの速さで動く。また，点Qは点PがAを出発すると同時にBを出発して，BC上をCまで毎秒2cmの速さで動く。このとき，四角形APQCの面積が67cm^{2}になるのは，１回目がP，Qが出発してから［ア］秒後，２回目がP，Qが出発してから［イ］秒後である。



［2］　右の図は，AB＝12cm，BC＝18cmの長方形ABCDである。点P，Qはそれぞれ頂点C，Dを同時に出発し，Pは辺CD上をDまで秒速2cmで，Qは辺DA上をAまで秒速3cmで動く。このとき，△BPQの面積が84cm^{2}になるのは，１回目がP，Qが出発してから［ウ］秒後，２回目がP，Qが出発してから［エ］秒後である。



［3］　右の図の四角形ABCDは，AB＝20cm，BC＝15cmの長方形である。点P，Qは同時に頂点Aを出発し，Pは秒速5cmで，Qは秒速2cmで，長方形ABCDの辺上をB，Cを通ってDまで動く。このとき，Pが辺BC上，Qが辺AB上にあり，△BPQの面積が40cm^{2}になるのは，P，Qが出発してから［オ］秒後である。



< *Note* >

第14講・二次方程式⑥ 割合に関する文章題

要点整理

1　百分率の増減の問題

a%増加→ $\left(1+\dfrac{a}{100}\right)$ をかける。　　a%減少→ $\left(1-\dfrac{a}{100}\right)$ をかける。

例題 1

原価 500 円の品物に原価の x%の利益を見込んで定価をつけたが，売れ残ったので，定価の x%引で売ると，20 円の損をした。x の値を求めなさい。

例題 2

鉄道会社で，ある路線の乗車賃の値上げを企画している。乗車賃を a% 値上げすれば，乗客数は $\frac{1}{2}a$% 減少するという試算がある。この試算をもとにして，次の問いに答えなさい。ただし，$a>0$ とする。

⑴　乗車賃を 10％値上げするとき，何％の増収になるか。

⑵　値上げ率を 50％以内におさえて，8％の増収を得るためには，乗車賃を何％値上げすればよいか。

例題 3

一昨年の売上金が等しい A 商店と B 商店がある。A 商店は一昨年と比べて昨年は売上金が 25％増え，昨年と比べて今年は 80％増えた。また，B 商店はこの間，前年度と比べて売上金が毎年 a% ずつ増えた。その結果，2 つの商店の今年の売上金は等しくなった。次の問いに答えなさい。

⑴　A 商店の今年の売上金は，一昨年の売上金の何％となるか。

⑵　a の値を求めよ。

問題

14－1

円の半径を x%増やしたら，その円の面積はもとの円の面積より 96%増加した。このとき，x の値を求めなさい。

14－2

ある店ではコーヒー１杯の値段を 300 円にすると，１日に 150 杯売れる。１杯の値段を 300 円から 10 円下げるごとに１日に売れるコーヒーは 6 杯ずつ増えるという。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　コーヒー１杯の値段を 300 円から $10x$ 円下げるとき，コーヒーは１日に何杯売れるか。x を用いて表せ。

(2)　ある日の１日のコーヒーの売り上げが 39960 円であったとき，コーヒー１杯を何円で売ったか。ただし，コーヒー１杯の値段を 300 円以下とする。

< *Note* >

第14講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

⑴　ある展覧会の金曜日の入場者数は1200人であったが，土曜日は金曜日に比べて入場者数がx割増加し，日曜日は土曜日に比べてさらに入場者数がx割増加した。日曜日の入場者数が2352人であるとき，xの値は［ア］である。

⑵　原価が1500円の商品がある。この商品に原価の$2x$割の利益を見込んで定価をつけたが，商品が古くなったため，定価のx割引きの値段で売ったところ，利益は180円であった。このとき，xの値は小さい順に［イ］，［ウ］である。

⑶　ある商品の定価は600円であり，定価通りの価格で販売すると，1日の売上個数は200個である。ある日，この商品を定価の$3x$%引きの価格で販売したところ，その日の売上個数は200個の$2x$%増しであり，売上金額は112200円になったという。このとき，xの値は［エ］である。

［2］　長方形の縦の長さをx%長くし，横の長さを$\frac{1}{2}x$%短くして新しい長方形をつくったところ，面積が8%増加した。このとき，xの値は小さい順に［オカ］，［キク］である。

< *Note* >

第１５講・二次方程式⑦ いろいろな二次方程式の文章題

要点整理

１　２次方程式の文章題

解が適切か考える。

２　座標の問題

x 軸に平行な直線上の点はすべて y 座標が等しい。

y 軸に平行な直線上の点はすべて x 座標が等しい。

また x 軸または y 軸に平行な直線上の２点間の距離は

$\left(\text{大きい座標}\right)-\left(\text{小さい座標}\right)$

で求まる。

３　割合の求め方

くらべる量÷もとの量＝割合

４　図形や点が移動する問題

辺の長さと移動距離の差を利用する。

例題 1

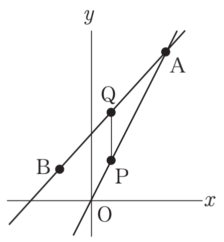
次の問いに答えなさい。

(1)　正方形の1辺の長さを1cm長くし，他方の辺を2倍した長方形の面積がもとの正方形の面積より48cm^{2}大きくなった。もとの正方形の1辺の長さを求めよ。

(2)　高さが8cmで，横が縦より2cm長い直方体がある。この直方体の体積が192cm^{3}のとき，縦の長さを求めよ。

例題 2

右の図のように，2点A(5, 10)，B($-$2, 3)がある。2つの直線OA，AB上にx座標がtである点をとり，それぞれP，Qとする。このとき，直線OAの式は，$y=2x$だから，点Pの座標は(t, $2t$)とおける。△AQPの面積が2となるとき，tの値を求めよ。ただし，Oは原点，点Pは2点O，Aの間にあるものとする。



例題 3

果汁(かじゅう) 40％のオレンジジュース 10 ℓ が入った大きな容器がある。いま，この容器から $x\ell$ のオレンジジュースを取り出して，同量の水をこの容器に加えた。よく混ぜてから，さらに，前の 2 倍の $2x\ell$ を取り出して，3 倍の水 $3x\ell$ を加えてよく混ぜた。その結果，果汁 16％のオレンジジュースになった。次の問いに答えなさい。ただし，水と果汁は同じ体積では同じ重さとする。

(1)　容器から $x\ell$ のオレンジジュースを取り出したとき，その中に含(ふく)まれる果汁の量を x を用いて表せ。

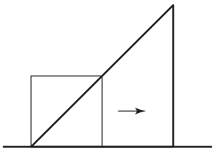
(2)　容器から $2x\ell$ のオレンジジュースを取り出したとき，その中に含まれる果汁の量を x を用いて表せ。

(3)　x の値を求めよ。

問題

15－1

3 辺の長さが 8cm，8cm，$8\sqrt{2}$ cm の直角三角形と 1 辺の長さが 4cm の正方形がある。右図の位置から毎秒 1cm の速さで正方形が右に進む。t 秒後に正方形と直角二等辺三角形が重なった部分の面積を S cm^2 とする。　次の問いに答えなさい。



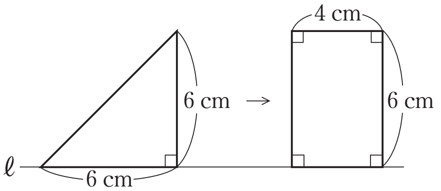
(1)　$0 \leqq t < 4$ のとき，S を t の式で表せ。式は展開しなくてもよい。

(2)　$4 \leqq t < 8$ のとき，S を t の式で表せ。式は展開しなくてもよい。

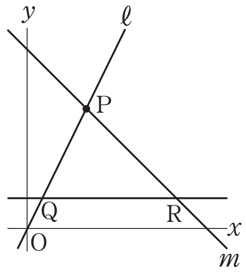
(3)　$S = 14$ となる t の値をすべて求めよ。

第15講・確認テスト

［1］　右の図のように，等しい辺の長さが6cmの直角二等辺三角形と，縦6cm，横4cmの長方形が直線ℓ上にあり，直角二等辺三角形が直線ℓに沿って，毎秒1cmの速さで右に向かって移動する。このとき，直角二等辺三角形と長方形の重なった部分の面積がはじめて13.5cm^{2}となるのは，直角二等辺三角形と長方形が重なり始めてから［ア］秒後である。



［2］　右の図で，直線ℓは$y=2x$のグラフ，直線mは$y=-x+12$のグラフであり，点Pは直線ℓと直線mの交点である。直線ℓ上の$x>0$の部分に点Qをとり，Qを通りx軸に平行な直線が直線mと交わる点をRとする。このとき，△PQR＝27となるQのx座標は小さい順に［イ］，［ウ］である。



［3］　濃度が15％の食塩水が10kg入った容器がある。この容器の中から$x$kgの食塩水をくみ出して，かわりに同じ重さの水を入れた。さらに，はじめにくみ出した食塩水の2倍の重さの食塩水をくみ出し，かわりに同じ重さの水を入れたところ，容器の中の食塩水の濃度は7.2％になった。このとき，次の問いに答えなさい。

⑴　はじめに$x$kgの食塩水をくみ出し，同じ重さの水を入れたあとの，容器の中の食塩水の濃度をxを用いた式で表すと，$\dfrac{［エ］(［オカ］-x)}{［キ］}$％である。

⑵　xの値は［ク］である。

< *Note* >

第4章　二乗に比例する関数

第16講・二乗に比例する関数①
関数 $y=ax^2$ のグラフと変域

要点整理

1　関数 $y=ax^2$

(1)　y が x の関数で，その関係が $\boldsymbol{y=ax^2}$（a は**比例定数**，$a \neq 0$）で表されるとき，y は x の**2乗に比例する**という。

(2)　y が x の2乗に比例するとき，x の値が m 倍になると，y の値は m^2 倍になる。

2　関数 $y=ax^2$ のグラフ

(1)　関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点を頂点とし，y 軸について対称な**放物線**になる。

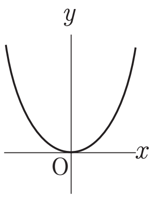
(2)　**$a>0$ のとき，グラフは上に開き**，x 軸の下側にはない。

$a<0$ のとき，グラフは下に開き，x 軸の上側にはない。

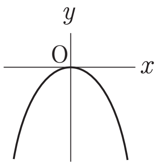
(3)　a の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は小さい。

●関数 $y=ax^2$ のグラフ

①　$a>0$ のとき，グラフは上に開く。x が増加するとき，
$x<0$ では，y は減少する。
$x>0$ では，y は増加する。



②　$a<0$ のとき，グラフは下に開く。x が増加するとき，
$x<0$ では，y は増加する。
$x>0$ では，y は減少する。



例題 1

自動車がブレーキをかけ始めてから停止するまでの距離を制動距離という。ある自動車が時速 $x$km で走っているときの制動距離を ym とすると，y は x の2乗に比例し，時速 50km で走っているときの制動距離は 20m である。次の問いに答えなさい。

(1)　y を x の式で表せ。

(2)　時速 75km で走っているときの制動距離を求めよ。

(3)　制動距離が 80m になるのは，時速何 km のときか，求めよ。

例題 2

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=x^2$ で，x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域を求めよ。

(2)　関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域は $0 \leqq y \leqq 6$ である。a の値を求めよ。

例題 3

2つの関数 $y=4x+a$，$y=bx^2$ で，x の変域を $-2 \leqq x \leqq c$ とすると，y の変域がともに $0 \leqq y \leqq 24$ となる。a，b，c の値を求めなさい。

問題

16－1

物を落としたとき，落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を ym とすると，y は x の2乗に比例し，落ち始めてから4秒間に落ちる距離が80mになった。次の問いに答えなさい。

(1)　y を x の式で表せ。

(2)　320mの上空から物を落としたとき，地面に落ちるまでの時間を求めよ。

16－2

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=-x^2$ について，x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域を求めよ。

(2)　関数 $y=ax^2$ で，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 12$ となった。このとき，a の値を求めよ。

＜ *Note* ＞

第16講・確認テスト

［1］　時速 $x$km で走る自動車がブレーキをかけ始めてから停止するまでに進む距離（制動距離）を ym とすると，y は x の２乗に比例し，時速 36km のときの制動距離は 9mであるという。次の問いに答えなさい。

(1)　y を x の式で表すと，$y=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウエ}}x^2$ である。

(2)　時速 60km のときの制動距離と時速 48km のときの制動距離の差は $\boxed{オ}$ m である。

(3)　制動距離が 49m のときの自動車の速さは時速 $\boxed{カキ}$ kmである。

［2］　次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ について，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の変域は $\boxed{ク} \leqq y \leqq \boxed{ケ}$ である。

(2)　関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-6 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 27$ となった。このとき，a の値は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

(3)　関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ について，x の変域が $a \leqq x \leqq a+6$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 4$ となった。このとき，a の値は小さい順に $a=-\boxed{シ}$，$-\boxed{ス}$ である。

< *Note* >

第17講・二乗に比例する関数② 関数 $y=ax^2$ の変化の割合

要点整理

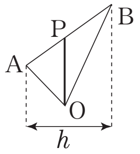
1　変化の割合

(1)　一次関数$y=ax+b$では，変化の割合は一定でaに等しい。

(2)　2乗に比例する関数 $y=ax^2$で，xの値が pから qまで増加するときの変化の割合は，$\dfrac{aq^2-ap^2}{q-p}=\dfrac{a(q+p)\cancel{(q-p)}}{\cancel{q-p}}=a(p+q)$

したがって，$a(p+q)$で求めることができる。

2　三角形の面積



$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{OP}\times h$

例題 1

次の問いに答えなさい。

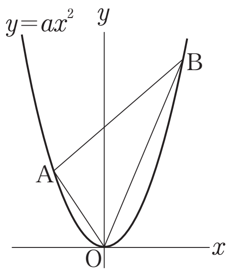
(1)　関数 $y=-2x^2$ について，x の値が -1 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

(2)　x の値が -3 から 1 まで増加するとき，2 つの関数 $y=ax^2$ と $y=4x+1$ の変化の割合は等しい。a の値を求めよ。

(3)　関数 $y=2x^2$ において，x の値が p から 3 だけ増加するとき，変化の割合が 2 になるように p の値を求めよ。

例題 2

右の図で，点 A，B は関数 $y=ax^2$ のグラフ上にあり，A の x 座標は -2，B の x 座標は 3 である。このとき，直線 AB の傾きが 1 になった。次の問いに答えなさい。



(1)　a の値を求めよ。

(2)　△OAB の面積を求めよ。

(3)　y 軸上の正の部分に点 C をとって，△AOB＝△COB となるようにするとき，点 C の y 座標を求めよ。

問題

17－1

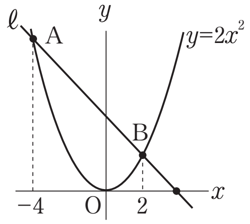
次の問いに答えなさい。

⑴　関数 $y=ax^2$ について，x の値が1から5まで増加するときの変化の割合が－14であるとき，a の値を求めよ。

⑵　関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ について，x の値が t から3だけ増加すると，y の値は2だけ増加する。t の値を求めよ。

17－2

右の曲線は関数 $y=2x^2$ のグラフである。この曲線と直線 ℓ との交点をA，Bとする。Aの x 座標を－4，Bの x 座標を2とするとき，次の問いに答えなさい。



⑴　直線 ℓ の式を求めよ。

⑵　△OABの面積を求めよ。

< *Note* >

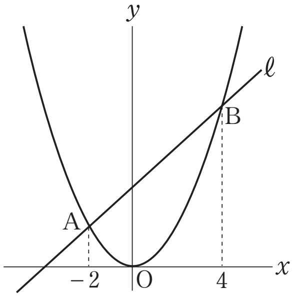
第17講 • 確認テスト

[1]　次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=ax^2$ について，x の値が -6 から -2 まで増加するときの変化の割合が 2 であるとき，a の値は $-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2)　関数 $y=\frac{2}{3}x^2$ について，x の値が a から $a+3$ まで増加するときの変化の割合が 6 であるとき，a の値は $\boxed{ウ}$ である。

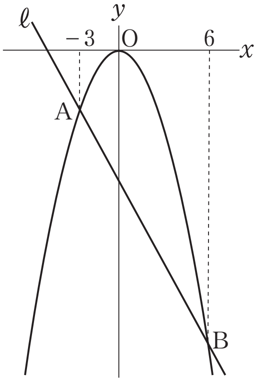
[2]　右の図の曲線は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。この曲線と直線 ℓ との交点を A，B とする。A の x 座標が -2，B の x 座標が 4 であるとき，次の問いに答えなさい。



(1)　直線 ℓ の傾きは $\boxed{エ}$，切片は $\boxed{オ}$ である。

(2)　△OABの面積は $\boxed{カキ}$ である。

[3]　右の図の曲線は関数 $y=ax^2$ のグラフであり，直線 ℓ は関数 $y=-2x-12$ のグラフである。この曲線と直線 ℓ との交点を A，B とする。A の x 座標が -3，B の x 座標が 6 であるとき，次の問いに答えなさい。



(1)　a の値は $-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

(2)　y 軸上の原点より下の部分に点 C をとり，△OCB＝△OAB とするとき，C の y 座標は $-\boxed{コサ}$ である。

< *Note* >

第１８講・二乗に比例する関数③ 文字をつかって座標を表す

要点整理

１　文字を使って座標を表す

放物線 $y=ax^2$ のグラフ上に点Pがあるとき，その x 座標を t とすると，y 座標は at^2 と表せる。

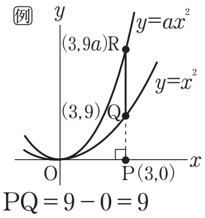
P $(t,\ at^2)$

２　座標軸に平行な線分の長さ

⑴　線分ABが x 軸に平行な場合，その長さは，２点A，Bの x 座標のうち，大きい方の x 座標から小さい方の x 座標をひいた差として表される。

⑵　線分ABが y 軸に平行な場合，その長さは，２点A，Bの y 座標のうち，大きい方の y 座標から小さい方の y 座標をひいた差として表される。

●座標軸に平行な線分の長さ
$(a>1$ とする$)$



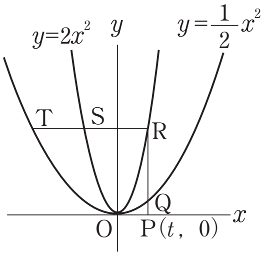
PQ$=9-0=9$

PR$=9a-0=9a$

QR$=9a-9$

例題 1

右の図で，点P$(t,\ 0)$は x 軸上の点である。点Pから y 軸に平行な直線をひき，関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ のグラフと交わる点をそれぞれQ，Rとする。また，点Rから x 軸に平行な直線をひき，関数 $y=2x^2$，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフと交わる点をそれぞれS，Tとする。$t>0$ として，次の問いに答えなさい。



⑴　$t=4$ のとき，線分QRの長さを求めよ。

⑵　点Tの座標を t を用いて表せ。

⑶　QR$=$RT となるときの t の値を求めよ。

例題 2

図１において，放物線①は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフであり，放物線②は関数 $y=ax^2$ のグラフである。また，点Ｐを x 軸上を動く点とし，点Ｐを通り x 軸に垂直な直線が放物線①，②と交わる点を，それぞれＱ，Ｒとする。このとき，PR＝3PQ が成り立っている。次の問いに答えなさい。

図1

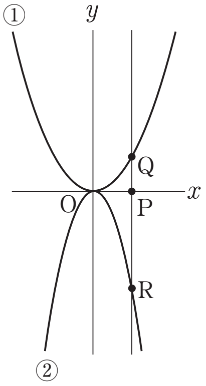
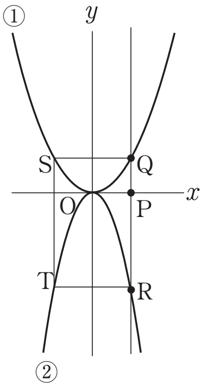


図2



⑴　関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，x の値が１から３まで増加するとき，y の増加量を求めよ。また，このときの変化の割合を求めよ。

⑵　a の値を求めよ。

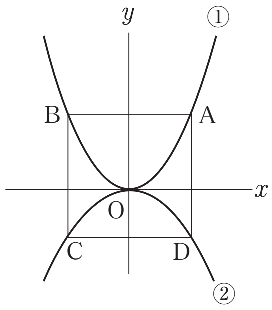
⑶　点Ｐの x 座標を t，線分 QR の長さを ℓ とするとき，ℓ を t の式で表せ。

⑷　点Ｐの x 座標を t とし，$t>0$ とする。上の図２のように，点Ｑを通り x 軸に平行な直線と放物線①との点Ｑ以外の交点をＳ，点Ｒを通り x 軸に平行な直線と放物線②との点Ｒ以外の交点をＴとし，四角形 STRQ をつくる。この四角形が正方形になるときの t の値を求めよ。

問題

18－1

2つの放物線 $y=x^2$…①，$y=-\frac{1}{2}x^2$…②がある。図のように，放物線①上の点Aを通り x 軸に平行な直線と放物線①との交点をB，点Bを通り y 軸に平行な直線と放物線②との交点をC，点Cを通り x 軸に平行な直線と放物線②との交点をDとする。このとき，次の問いに答えなさい。



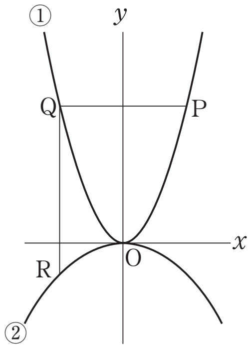
(1)　点Aの x 座標が t のとき，線分ABと線分ADの長さを t で表せ。

(2)　四角形ABCDが正方形になるとき，点Aの座標を求めよ。

< *Note* >

第18講・確認テスト

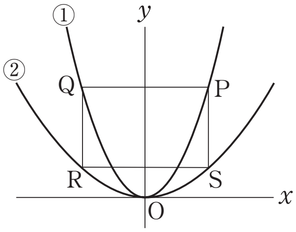
［1］　右の図で，放物線①は関数 $y=2x^2$ のグラフ，放物線②は関数 $y=ax^2$ のグラフである。放物線①上の x 座標が $t(t>0)$ である点をＰとし，Ｐを通り，x 軸に平行な直線が放物線①と交わる点をQ，Ｑを通り，y 軸に平行な直線が放物線②と交わる点をＲとする。次の問いに答えなさい。



(1)　$t=2$ のとき，直線PRの傾きが $\frac{5}{2}$ であった。このとき，a の値は $-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2)　a の値が(1)で求めた値であるとき，PQ：QR＝3：5となる t の値は $\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

［2］　右の図で，放物線①は関数 $y=x^2$ のグラフ，放物線②は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。点Ｐ，Ｑは放物線①上の点，点Ｒ，Ｓは放物線②上の点であり，四角形PQRSの各辺はそれぞれ x 軸，または y 軸と平行である。Ｐの x 座標を $t(t>0)$ とするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　Ｒの座標を t を用いて表すと，$\left(-t,\ \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}t^2\right)$ である。

(2)　$t=4$ のとき，直線PRの式は $y=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}x+\boxed{ケコ}$ である。

(3)　四角形PQRSが正方形になるとき，t の値は $\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

< *Note* >

第１９講・二乗に比例する関数④ 面積に関する問題

要点整理

１　中点の座標の求め方

$(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ の中点の座標は $\left(\dfrac{a+c}{2},\ \dfrac{b+d}{2}\right)$

２　傾きと通る点がわかっている直線の式

傾きが a で，$(p,\ q)$ を通る直線の式は　$y=a(x-p)+q$

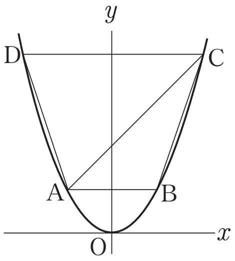
３　面積の二等分

・三角形を二等分する…１つの頂点と頂点に向かい合う辺の，真ん中の点を通る直線をひく。

・台形を二等分する…上底と下底の和が半分になるように直線をひく。

例題 1

右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に4点A，B，C，Dがあり，点Aの座標は（-2，2），点Bの y 座標は2，点C，Dの y 座標は8である。次の問いに答えなさい。



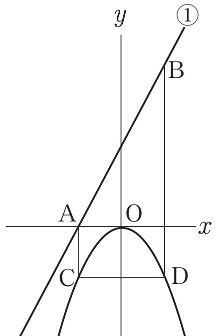
(1)　a の値を求めよ。

(2)　点Aを通り，△ABCの面積を2等分する直線の式を求めよ。

(3)　点Bを通り，四角形ABCDの面積を2等分する直線が線分CDと交わる点の座標を求めよ。

例題 2

右の図のように，2つの関数 $y=2x+6$…①，$y=ax^2$（a は定数）…②のグラフがある。関数①のグラフ上に2点A，Bがあり，Aは関数①のグラフと x 軸との交点である。また，関数②のグラフ上に2点C，Dがあり，線分CDは x 軸に平行である。線分ACと線分BDは y 軸に平行で，BD＝4ACである。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　点Bの座標を求めよ。

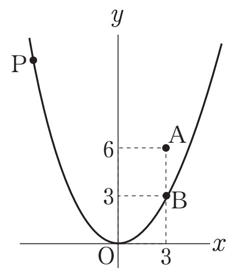
(2)　a の値を求めよ。

(3)　関数②のグラフ上で，2点C，Dの間に点Pをとる。△PCDの面積が△PACの面積の $\frac{2}{3}$ となるときのPの x 座標を t として，t の方程式をつくり，t の値を求めよ。

問題

19－1

右の図において，２点Ａ，Ｂの座標はそれぞれ，(3，6)，(3，3)であり，放物線は関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフで，点Ｂを通っている。また，この放物線上に，x 座標が負の数である点Ｐをとる。次の問いに答えなさい。



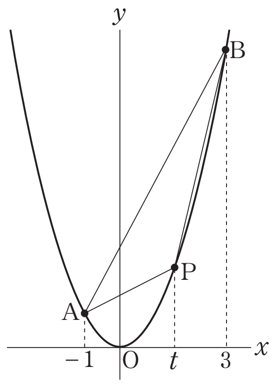
(1)　点Ｐの x 座標が -6 のとき，２点Ａ，Ｐを通る直線の式を求めよ。

(2)　点Ａを通り x 軸に平行な直線を ℓ とする。直線 ℓ によって△APBの面積が２等分されるとき，点Ｐの x 座標を求めよ。

＜ *Note* ＞

第19講・確認テスト

［1］　右の図で，放物線は関数 $y=2x^2$ のグラフである。２点 A，B はこの放物線上の点であり，それぞれの x 座標は -1，３である。放物線上の A と B の間に点 P をとり，３点 P，A，B を結んで△PAB をつくる。P の x 座標を $t(-1<t<3)$ とするとき，次の問いに答えなさい。

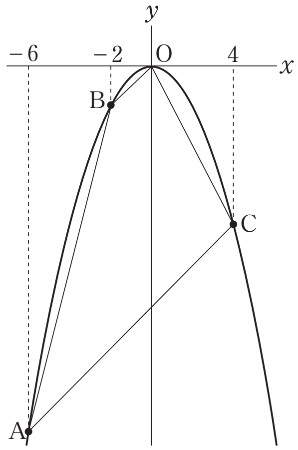


⑴　２点 A，B を通る直線の式は，$y=$［ア］$x+$［イ］である。

⑵　$t=2$ のとき，△PAB の面積は［ウエ］である。

⑶　P を通り，x 軸に平行な直線が△PAB の面積を２等分するとき，P の座標は（$\sqrt{［オ］}$，［カキ］）である。

［2］　右の図で，放物線は関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。３点 A，B，C はこの放物線上の点であり，x 座標はそれぞれ -6，-2，４である。このとき，次の問いに答えなさい。



⑴　四角形 OBAC の面積は［クケ］である。

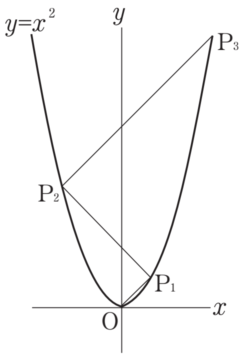
⑵　原点を通り，四角形 OBAC の面積を２等分する直線の式は $y=$［コ］x である。

< *Note* >

第20講・二乗に比例する関数⑤ 放物線と直線

例題 1

右の図のように，$y=x^2$ のグラフにおいて，OP_1，P_2P_3 の傾きが1，P_1P_2 の傾きが -1 となるように，P_1，P_2，P_3 をとるとき，次の問いに答えなさい。

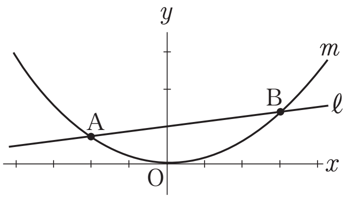


(1)　P_1，P_2，P_3 の座標を求めよ。

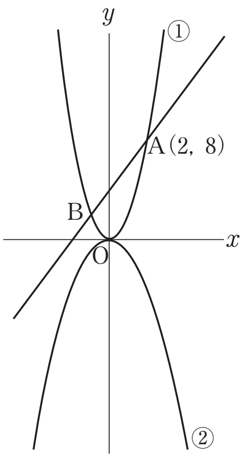
(2)　四角形 OP_1P_2Q が平行四辺形となるように点Qをとりたい。Qの座標を求めよ。

例題 2

右図において，m は $y=ax^2$ のグラフを表す。a は定数である。A，Bは m 上の点であり，その x 座標はそれぞれ -2，3である。ℓ は2点A，Bを通る直線であり，ℓ と y 軸との交点の y 座標は1である。a の値を求めなさい。



例題 3



右図の①，②は，それぞれ関数 $y=ax^2(a>0)$，$y=-x^2$ のグラフであり，①は点 A(2，8) を通る。A を通り傾きが 2 の直線と①との交点のうち，A 以外の交点を B とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　a の値を求めよ。

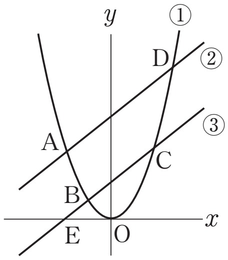
(2)　点 B の座標を求めよ。

(3)　②上に異なる 2 点 P，Q をとり，AB∥PQ となるようにする。P，Q の x 座標をそれぞれ p，q とするとき，$p+q$ の値を求めよ。

問題

20－1

右の図のように，放物線 $y=ax^2$…①と２直線 $y=\frac{1}{2}x+3$…②，$y=\frac{1}{2}x+k$ $(0<k<3)$ …③　がある。放物線①と直線②との交点を A，D，放物線①と直線③との交点を B，C，直線③と x 軸との交点を E とする。点 A の x 座標が－2 のとき，次の問いに答えなさい。



(1)　a の値を求めよ。

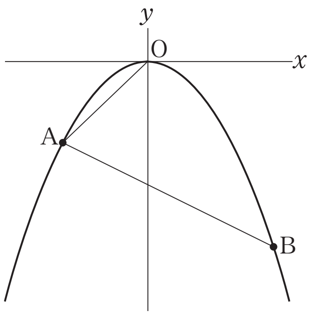
(2)　△ACD の面積が $\frac{25}{4}$ のとき，k の値を求めよ。

(3)　四角形 AECD が平行四辺形になるとき，k の値を求めよ。

< *Note* >

第20講 • 確認テスト

[1]　右の図で，放物線は関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフであり，2点A，Bはこの放物線上の点である。直線OAの傾きが1，直線ABの傾きが $-\frac{1}{2}$ のとき，次の問いに答えなさい。

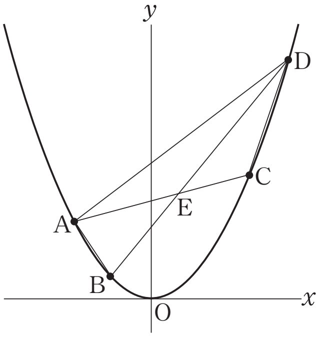


(1)　点Aの座標は（$-$［ア］，$-$［イ］）である。

(2)　点Bの座標は $\left(［ウ］,\ -\frac{［エ］}{［オ］}\right)$ である。

(3)　放物線上に点P，Qをとり，PQ∥ABとなるようにする。Pの x 座標を p，Qの x 座標を q とすると，$q=-p+$［カ］である。

[2]　右の図で，放物線は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。4点A，B，C，Dはこの放物線上の点であり，点A，Bの x 座標はそれぞれ -4，-2 で，直線ADの傾きは $\frac{3}{4}$ である。また，△ABE＝△CDEである。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　点Dの座標は $\left(［キ］,\ \frac{［クケ］}{［コ］}\right)$ である。

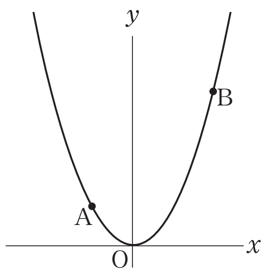
(2)　点Cの座標は $\left(［サ］,\ \frac{［シス］}{［セ］}\right)$ である。

< *Note* >

第21講・二乗に比例する関数⑥ 放物線と面積

例題 1

関数 $y=ax^2$ のグラフ上に，図のように2点A，Bがあり，点Aの x 座標は -3，点Bの座標は（6，12）である。次の問いに答えなさい。



(1)　点Aの y 座標を求めよ。

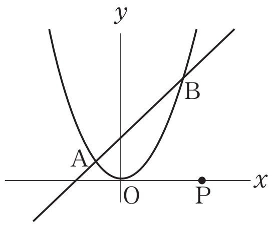
(2)　2点A，Bを通る直線の方程式を求めよ。

(3)　原点をOとする。△OABの面積を求めよ。

(4)　x 軸に平行な直線 $y=k$ によって△OABの面積が2等分されるとき，k の値を求めよ。

例題 2

図のように，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ が2点A，Bで交わっている。また，点Pは，x 軸上の正の部分を動く点である。次の問いに答えなさい。

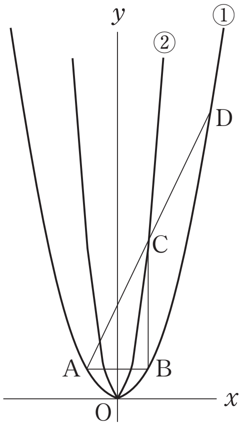


(1)　交点A，Bの座標を求めよ。

(2)　△APBの面積が22になるときの点Pの x 座標を求めよ。

例題 3

右の図は，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$…①，$y=ax^2\,(a>1)$…②のグラフである。点A，点Bは直線 $y=2$ と放物線①との交点，点Cは点Bを通り y 軸に平行な直線と放物線②との交点，また，点Dは直線ACと放物線①との交点である。△ABDの面積が△ABCの面積の2倍であるとき，次の問いに答えなさい。



(1)　a の値を求めよ。

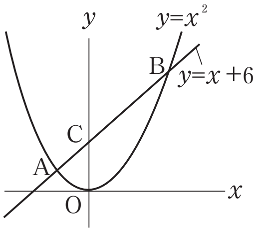
(2)　直線ACと y 軸との交点の y 座標を求めよ。

(3)　直線 $y=mx$ が四角形OBDAの面積を2等分するとき，m の値を求めよ。

問題

21－1

右の図のように，２つの関数 $y=x^2$ と $y=x+6$ のグラフの交点をA，Bとし，原点をOとする。次の問いに答えなさい。



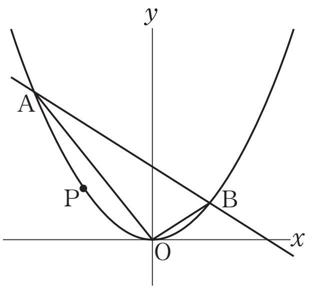
⑴　A，Bの座標を求めよ。

⑵　$y=x^2$ 上に原点と異なる点Dをとり，△OABと△DABの面積が等しくなるようにする。このとき，適するDの座標は３つあり，そのうちの１つは（－3，9）である。残り２つの座標を求めよ。

＜ *Note* ＞

第21講・確認テスト

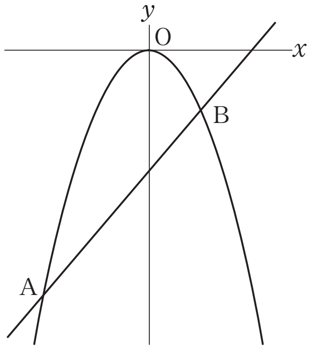
[1]　右の図で，放物線と直線は，それぞれ関数 $y=\frac{1}{4}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x+2$ のグラフであり，点A，Bは放物線と直線の交点である。また，放物線上の点をPとする。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　点Aの座標は（$-$[ア]，[イ]），点Bの座標は（[ウ]，[エ]）である。

(2)　△PAB＝△OABとなる点Pの x 座標は，
$-$[オ]，$-$[カ]$\pm\sqrt{\text{[キク]}}$ である。ただし，Pは原点とは異なる点とする。

[2]　右の図で，放物線と直線は，それぞれ関数 $y=-x^2$，$y=2x-8$ のグラフであり，点A，Bは放物線と直線の交点である。これについて，次の問いに答えなさい。



(1)　点Aの座標は（$-$[ケ]，$-$[コサ]），点Bの座標は（[シ]，$-$[ス]）である。

(2)　放物線上の直線より下の部分に点Pをとり，△PAB＝2△OABとなるようにする。
このとき，Pの x 座標は $-$[セ]，[ソ] である。

(3)　x 軸上の，直線 $y=2x-8$ より左の部分に点Qをとり，△QAB＝18となるようにするとき，Qの x 座標は[タ]である。

< *Note* >

第５章　円周角の定理

第22講・円周角の定理①　中心角と弧・円周角

要点整理

1　中心角と弧

(1)　1つの円において，

①　等しい中心角に対する弧の長さは等しい。

②　等しい弧に対する中心角の大きさは等しい。

(2)　1つの円において，**弧の長さは中心角の大きさに比例する。**

2　円周角

(1)　1つの円において，円周上の2点A，Bと，$\overset{\frown}{AB}$上にない円周上の点Pとを結んでできる∠APBを，$\overset{\frown}{AB}$に対する**円周角**（えんしゅうかく）という。

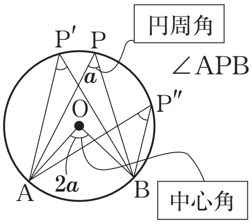
(2)　円周角の定理

①　**1つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の半分である。**

②　**同じ弧に対する円周角はすべて等しい。**

(3)　半円の弧に対する円周角は直角である。
（直径に対する円周角は直角である。）

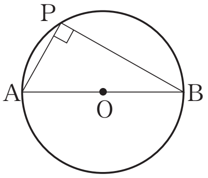
●円周角



∠APB＝∠AP′B
＝∠AP″B

$\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$

●直径に対する円周角

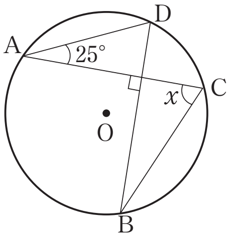


ABが円Oの直径のとき
∠APB＝90°

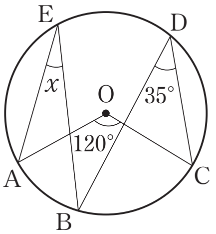
例題 1

次の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。ただし，O は各円の中心とする。

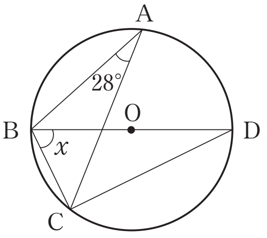
(1)



(2)



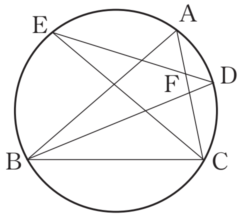
(3)



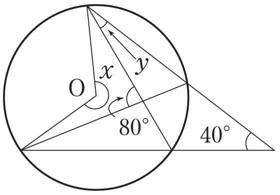
例題 2

次の問いに答えなさい。

(1)　右の図のように，円に内接する△ABC において，∠B と∠C の二等分線が円と交わる点を D，E とし，ED と AC が交わる点を F とする。∠ABC＝54°，∠ACB＝70° のとき，∠AFE の大きさは何度か。



(2)　右の図で，$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めよ。ただし，O は円の中心とする。

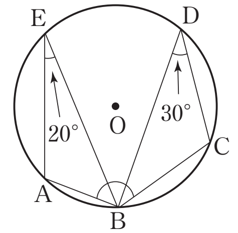


問題

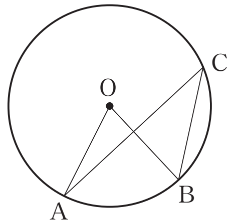
22－1

次の問いに答えなさい。

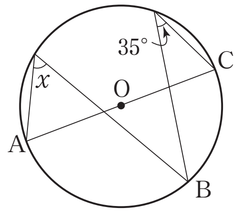
⑴　右の図の円Oにおいて，点A，B，C，D，Eは円周上の点である。このとき，∠ABCの大きさを求めよ。



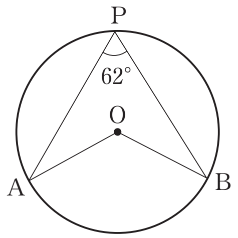
⑵　右の図で，点A，B，Cは円Oの周上にあり，∠OAC＝20°，∠OBC＝54°である。このとき，∠AOBの大きさは何度か。



⑶　右図において，∠xの大きさを求めよ。

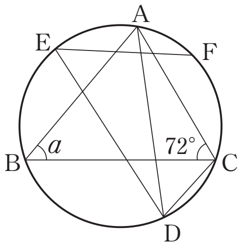


⑷　右図において，∠PAO＋∠PBOの大きさを求めよ。



22－2

右の図のように3点A，B，Cを通る円の周上に点D，E，FをCD∥AB，DE∥CA，EF∥BCとなるようにとる。∠ACB＝72°，$\overset{\frown}{AF}$と$\overset{\frown}{FC}$の長さの比が1：2であるとき，次の問いに答えなさい。



⑴　∠ABC＝aとして，∠BCEおよび，∠CADの大きさをaの式で表せ。

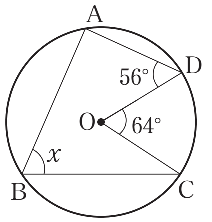
⑵　∠ABCの大きさを求めよ。

＜ *Note* ＞

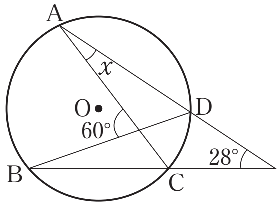
第22講・確認テスト

[1]　次のそれぞれの図で，4 点 A，B，C，D は円周上の点，点 O は円の中心である。このとき，∠x の大きさをそれぞれ求めなさい。

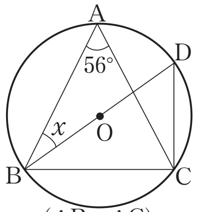
(1)　∠x＝ アイ 度



(2)　∠x＝ ウエ 度

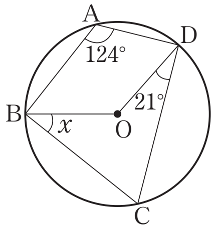


(3)　∠x＝ オカ 度

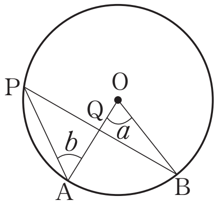


(AB＝AC)

(4)　∠x＝ キク 度

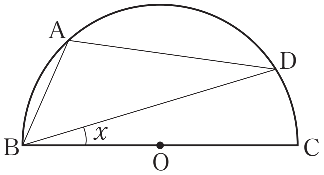


[2]　右の図で，3 点 P，A，B は円周上の点で，点 O は円の中心である。また，線分 OA と PB の交点を Q とする。∠ AOB，∠ OAP の大きさをそれぞれ a，b とするとき，∠ OBP の大きさを a，b を用いた式で表しなさい。



∠OBP＝$-\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}a+b$(度)

[3]　右の図で，4 点 A，B，C，D は円 O の周上の点であり，線分 BC は円の直径である。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　∠CBD＝x 度とするとき，∠BAD の大きさを x を用いて表しなさい。

∠BAD＝x＋ サシ (度)

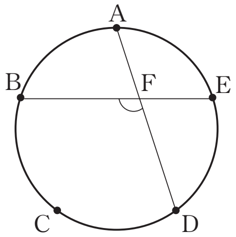
(2)　∠CBD＝18°，$\overset{\frown}{BA}$：$\overset{\frown}{AD}$＝1：2 のとき，∠ADB＝ スセ 度である。

< *Note* >

第23講・円周角の定理②　円周角の応用問題

例題 1

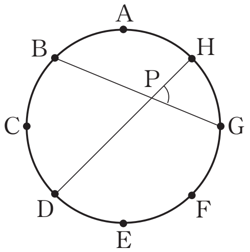
右の図で，点 A，B，C，D，E は円周の長さを 5 等分する点である。弦 AD と BE の交点を F とするとき，∠BFD の大きさを求めなさい。



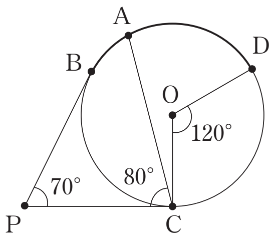
例題 2

次の問いに答えなさい。

(1)　右の図で，点 A，B，C，D，E，F，G，H は円周を 8 等分した点を表している。点 B と点 G を結んだ線分と，点 D と点 H を結んだ線分との交点を P とする。∠GPH の大きさは何度か。

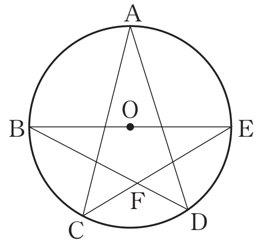


(2)　右の図において，PB，PC は円 O の接線であり，点 B，C はそれぞれ接点である。このとき，$\overset{\frown}{BA}:\overset{\frown}{AD}$ を求めよ。



例題 3

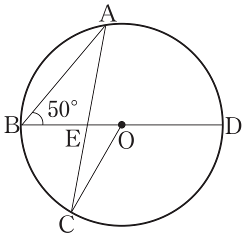
右の図で，円Oの円周上に5点A，B，C，D，Eがこの順に時計と反対回りに並んでいる。点Bと点Eを結んだ線分BE上に中心Oがある。点Aと点C，点Aと点D，点Bと点D，点Cと点Eをそれぞれ結ぶ。線分BDとCEの交点をFとする。$\angle DBE = 29°$，$\angle BFE = 118°$のとき，$\angle CAD$の大きさを求めなさい。



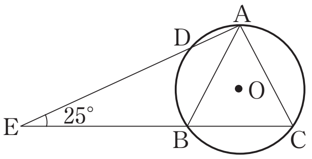
問題

23－1

次の問いに答えなさい。



⑴　右の図で，BD は点 O を中心とする円の直径で，∠ABD ＝50° であり，点 A を含まない 2 つの弧，$\overset{\frown}{BC}$ と $\overset{\frown}{CD}$ の長さの比は 1：2 である。AC が BD と交わる点を E とするとき，∠AEB の大きさを求めよ。



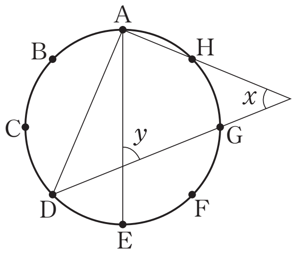
⑵　右の図のように，正三角形 ABC は円 O に内接している。辺 CB の延長上に∠AEB＝25° となるように点 E をとる。線分 AE と円の交点を D とするとき，$\overset{\frown}{AD}$：$\overset{\frown}{DB}$ を最も簡単な整数の比で表せ。

＜ *Note* ＞

第23講・確認テスト

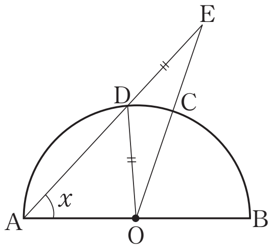
[1]　右の図で，A ～ H の各点は円周を 8 等分する点である。このとき，$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。

$\angle x=$ [アイ] 度，$\angle y=$ [ウエ] . [オ] 度



[2]　右の図の半円 O で，線分 AB は直径である。半円周上に 2 点 C，D をとり，OC の延長と AD の延長が交わる点を E とする。OD = DE，$\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CB}=3:2$ のとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

$\angle x=$ [カキ] 度



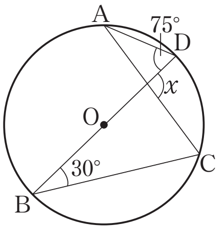
[3]　右の図で，4 点 A，B，C，D は円 O の周上の点であり，線分 BD は直径である。$\angle ADB=75^\circ$，$\angle CBD=30^\circ$ のとき，次の問いに答えなさい。

(1)　$\angle x$ の大きさを求めなさい。

$\angle x=$ [クケコ] 度

(2)　$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}$ を求めなさい。

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=$ [サ] : [シ] : [ス] : [セ]



< *Note* >

第２４講・円周角の定理③ 円周角の定理の証明問題

例題 1

右の図１で，円Ｏの$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角∠APBと中心角∠AOBの大きさについて，$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$という関係が成り立つ。このことを次のように証明した。下の問いに答えなさい。

図１

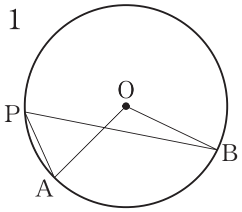
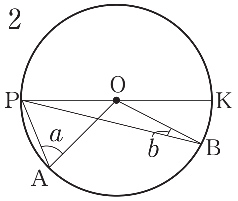


図２



証明　図２のように，直径PKをひき，$\angle OAP=\angle a$，

$\angle OBP=\angle b$とすると，

△OPAで，OP＝OAだから，$\underline{\angle OPA=\angle a}$

∠AOKは△OPAの外角だから

$\angle AOK=\angle OPA+\angle OAP=2\angle a$

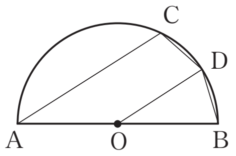
（　　　　　　　　　　）

(1)　$\underline{\angle OPA=\angle a}$について，その根拠となっている二等辺三角形の性質を書け。

(2)　［　　　　］の部分には証明の続きが入る。それを書け。

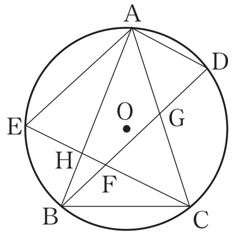
例題 2

右の図のように，線分 AB を直径とする半円があり，点 O は AB の中点である。$\overset{\frown}{AB}$上に点 C をとり，さらに$\overset{\frown}{BC}$上に AC∥OD となるように点 D をとる。このとき，BD＝CD となることを証明しなさい。



例題 3

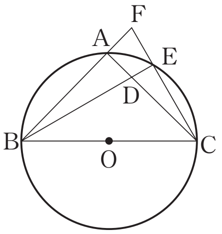
右の図で，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であり，頂点 A，B，C は円 O の円周上にある。$\overset{\frown}{AC}$上に点 D をとり，点 A を通り BD に平行な直線と円 O との交点を E とする。BD と CE，CA との交点をそれぞれ F，G とし，CE と AB との交点を H とする。このとき，四角形 AEFD は平行四辺形であることを証明しなさい。



問題

24－1

右の図のように，線分BCを直径とする円Oがあり，円Oの周上に，AB＝ACとなる点Aをとる。辺AC上に点Dをとり，BDの延長と$\overset{\frown}{AC}$との交点をEとし，辺BAの延長とCEの延長との交点をFとする。このとき，BD＝CFであることを証明しなさい。

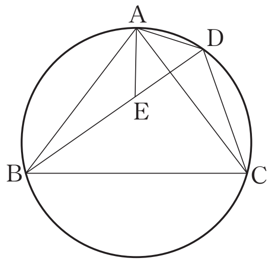


< *Note* >

第24講・確認テスト

[1]　次の(1)，(2)について，それぞれ ▭ にあてはまるものをあとから選び，記号で答えなさい。ただし，同じ記号を何度使ってもよいものとする。

(1)　右の図で，4点A，B，C，Dは円周上の点で，AB＝ACである。線分BD上に点Eを，BE＝CDとなるようにとるとき，△ABE≡△ACDであることを，次のように証明した。



証明　△ABEと△ACDにおいて，

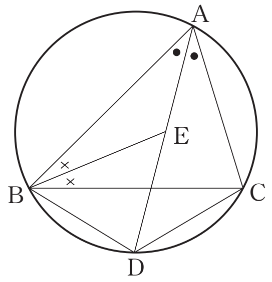
仮定より，AB＝ ア …①

BE＝ イ …②

ウ に対する円周角より，∠ABE＝∠ エ …③

①，②，③より， オ がそれぞれ等しいから，△ABE≡△ACD

(2)　右の図のように，円に内接する△ABCがある。∠BACの二等分線が円周と交わるA以外の点をD，∠ABCの二等分線が線分ADと交わる点をEとする。このとき，DB＝DC＝DEであることを，次のように証明した。



証明

カ に対する円周角より，∠ キ ＝∠DAC…①

ク に対する円周角より，∠ ケ ＝∠DAB…②

仮定より，∠DAC＝∠DAB…③

①，②，③より，∠ キ ＝∠ ケ

よって，△DBCは二等辺三角形となり， コ ＝DC…④

また，∠DBE＝∠DBC＋∠ サ

△ シ の外角より，∠DEB＝∠DAB＋∠ ス

①，③より，∠DBC＝∠DAB

仮定より，∠ サ ＝∠ ス

よって，∠DBE＝∠DEBより，

△ セ は二等辺三角形となり，DB＝ ソ …⑤

④，⑤より，DB＝DC＝DE

①　AC　②　CD　③　DB　④　DE　⑤　$\overset{\frown}{AD}$　⑥　$\overset{\frown}{BD}$　⑦　$\overset{\frown}{CD}$

⑧　ABE　⑨　ACD　⑩　CBE　⑪　DBC　⑫　DBE　⑬　DCB

⑭　３組の辺　⑮　２組の辺とその間の角　⑯　１組の辺とその両端の角

第６章　相似

第25講・相似①　長さを求める問題

要点整理

1　相似

(1)　ある図形を，その形を変えないで，何倍かに**拡大**（かくだい），または**縮小**（しゅくしょう）した図形は，もとの図形と**相似**（そうじ）であるという。

(2)　△ABC と△DEF が相似であることを，記号∽を使って，対応する頂点の順に，**△ABC ∽△DEF** と表し，「三角形 ABC 相似　三角形 DEF」と読む。

2　相似な図形の性質

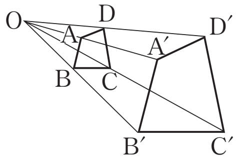
(1)　相似な図形では，対応する線分の長さの比はすべて等しい。この比，または比の値を**相似比**（そうじひ）という。

(2)　相似な図形では，対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

3　相似の位置と相似の中心

２つの図形の対応する点どうしを通る直線がすべて１点Ｏに集まり，Ｏから各図形の対応する点までの距離の比がすべて等しいとき，２つの図形は**相似の位置にある**といい，点Ｏを**相似の中心**という。

●相似の位置にある

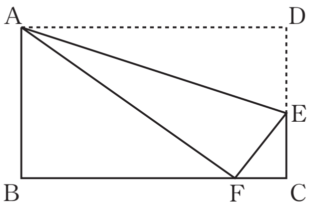


四角形ABCD∽四角形 A′B′C′D′

OA：OA′
＝OB：OB′
＝OC：OC′
＝OD：OD′

例題 1

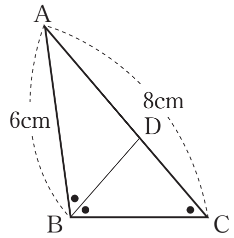
右の図のように，AB＝6cm，AD＝10cmである長方形ABCDの紙の頂点Dが，辺BC上の点Fに重なるように折り曲げた。AEは折り目の線である。BF＝8cmとするとき，EFの長さを求めなさい。求め方も書くこと。



例題 2

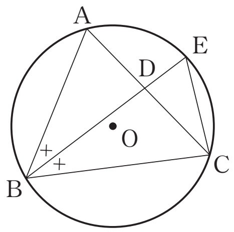
次の問いに答えなさい。

(1) 右の図で，AB＝6cm，AC＝8cm，∠ABD＝∠CBD＝∠BCDのとき，辺BCの長さを求めよ。



(2) 右の図のように，円Oの周上の点A，B，Cを結んでできる△ABCがある。∠ABCの二等分線と辺AC，円Oとの交点をそれぞれD，Eとするとき，次の問いに答えよ。

① △DCEに相似な三角形を，△DCE以外に2つあげよ。



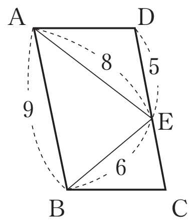
② BE＝16cm，DE＝4cmとするとき，CEの長さを求めよ。

問題

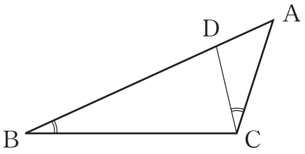
25－1

次の問いに答えなさい。

(1)　右の図の平行四辺形 ABCD において，AB＝9，DE＝5，BE＝6，AE＝8 である。AD の長さを求めよ。

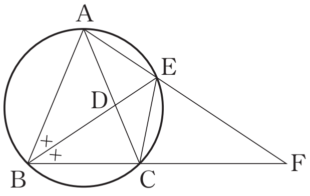


(2)　右の図で，∠ABC＝∠ACD，AB＝8 cm，BC＝6 cm，CA＝4 cm である。このとき，BD の長さを求めよ。



25－2

右の図のように，円周上の 3 点 A，B，C を頂点とし，AB＝AC＝6 cm，BC＝4 cm である△ABC がある。∠B の二等分線と，辺 AC，$\overset{\frown}{AC}$との交点をそれぞれ D，E とし，点 C と点 E を線分で結ぶ。また，辺 BC の延長と弦 AE の延長との交点を F とする。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　∠ACB＝a とするとき，∠CAE の大きさを a を用いて表せ。また，線分 CF の長さを求めよ。

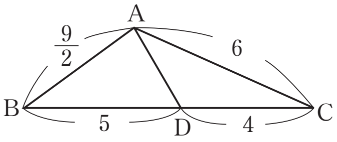
(2)　AE：AF を最も簡単な整数の比で答えよ。

(3)　線分 CE の長さを求めよ。

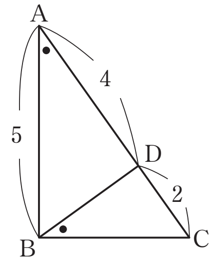
＜ *Note* ＞

第25講・確認テスト

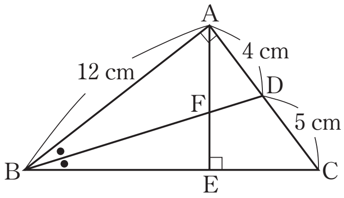
［1］　次の問いに答えなさい。



⑴　右の図において，$AB=\frac{9}{2}$，AC＝6，BD＝5，CD＝4 である。このとき，AD の長さは［ア］である。



⑵　右の図において，∠BAC＝∠CBD，AB＝5，AD＝4，CD＝2 である。このとき，BC の長さは［イ］$\sqrt{［ウ］}$である。



［2］　右の図の△ABC は，∠BAC＝90°，AB＝12cm の直角三角形である。∠ABC の二等分線が辺 AC と交わる点を D，A から辺 BC にひいた垂線が BC と交わる点を E，BD と AE が交わる点を F とする。これについて，次の問いに答えなさい。

⑴　AF の長さを求めなさい。

AF＝［エ］cm

⑵　BC の長さを求めなさい。

BC＝［オカ］cm

⑶　BE，EF の長さを求めなさい。

$BE=\frac{［キク］}{［ケ］}$ cm，$EF=\frac{［コサ］}{［シ］}$ cm

< *Note* >

第26講・相似②　相似の証明問題

要点整理

1　三角形の相似条件

2つの三角形は，次の各場合に，相似である。

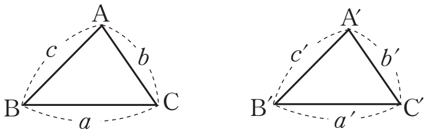
①　3組の辺の比が等しい。

②　2組の辺の比が等しく，その間の角が等しい。

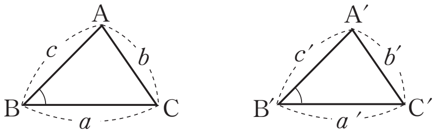
③　2組の角がそれぞれ等しい。

●三角形の相似条件

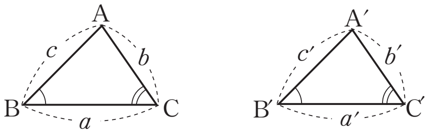
①　$a : a' = b : b' = c : c'$



②　$a : a' = c : c'$，$\angle B = \angle B'$

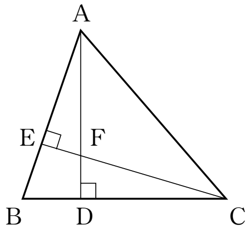


③　$\angle B = \angle B'$，$\angle C = \angle C'$



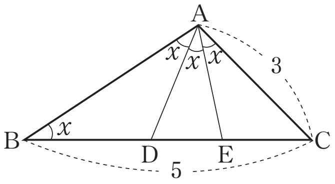
例題 1

右の図のように，△ABC の 2 点 A，C から辺 BC，AB にそれぞれ垂線 AD，CE をひく。AD，CE の交点を F とするとき，△ABD∽△CFD であることを証明しなさい。



例題 2

∠A＝$3x$，∠B＝x，AC＝3，BC＝5 の△ABC がある。右図のように，∠A の 3 等分線と BC との交点を D，E とするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　∠ADC の大きさを x で表せ。

(2)　AD の長さを求めよ。

(3)　AB と AE の長さの比 AB：AE を，最も簡単な整数の比で表せ。

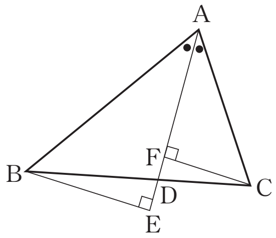
(4)　線分 AB の長さを求めよ。

問題

26－1

以下の文は，△ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，BD：DC＝AB：AC となることの証明である。空欄に適切な記号，文字を入れなさい。

右の図では，△ABC の∠A の二等分線と対辺の交点を D，頂点 B，C から直線 AD にひいた垂線の足をそれぞれ E，F としている。



証明　△ABE と△ACF において，

［㋐］＝［㋑］＝90°

∠BAE＝［㋒］であるので

△ABE［㋓］△ACF

よって，AB：AC＝［㋔］：［㋕］…①

次に，△DBE と△DCF において，∠BDE＝［㋖］

［㋗］＝［㋘］＝90° だから，△DBE［㋙］△DCF

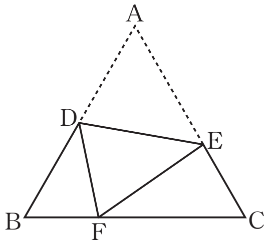
よって，DB：DC＝［㋚］：［㋛］…②

①，②より，DB：DC＝［㋜］：［㋝］　　よって，証明された。

< *Note* >

第26講・確認テスト

[1]　右の図において，△ABCは正三角形である。辺AB上に点D，辺AC上に点Eをとり，線分DEを折り目として△ABCを折り返したところ，頂点Aが辺BC上の点Fに移った。このとき，△BFD∽△CEFであることを，次のように証明した。［エ］～［カ］にはあてはまる数を答えなさい。また，それ以外の［　］にあてはまるものを下から選び，記号で答えなさい。



［証明］　△BFDと△CEFにおいて，

正三角形の角だから，∠DBF＝∠［ア］＝60°…①

△BFDの内角から，∠［イ］＝180°－(∠［ウ］＋∠DFB)

＝［エオカ］°－∠DFB

3点B，F，Cは同一直線上にあるから，

∠［キ］＝180°－(∠［ク］＋∠DFB)

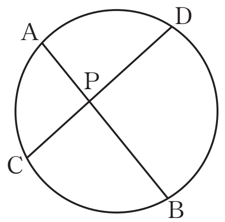
＝［エオカ］°－∠DFB

よって，∠［イ］＝∠［キ］…②

①，②より，2組の角がそれぞれ等しいから，△BFD∽△CEF

①　DBF	②　DEF	③　DFE	④　EDA
⑤　EDF	⑥　EFC	⑦　FCE	⑧　FDB

［2］　右の図において，４点 A，B，C，D は円周上の点であり，P は線分 AB と CD の交点である。このとき，PA×PB＝PC×PD であることを，次のように証明した。［　　］にあてはまるものを下から選び，記号で答えなさい。



証明　A と C，B と D をそれぞれ結ぶ。

△PAC と△PDB において，

［ ケ ］の円周角より，∠PAC＝∠［ コ ］…①

対頂角で，∠［ サ ］＝∠［ シ ］…②

①，②より，２組の角がそれぞれ等しいから，△PAC ∽△PDB

よって，PA：PD＝［ ス ］：［ セ ］

比例式の性質より，PA×PB＝PC×PD

① APC	② APD	③ DAP	④ DPB
⑤ PBC	⑥ PDB	⑦ $\overset{\frown}{AC}$	⑧ $\overset{\frown}{BD}$
⑨ $\overset{\frown}{CB}$	⑩ PB	⑪ PC	⑫ PD

第２７講・相似③ 平行線と線分比

要点整理

1　三角形と平行線

右の図①のように，△ABC において，点 D, E をそれぞれ辺 AB，AC 上，または，その延長上の点とするとき，次のことがいえる。

① DE∥BC ならば，AD：AB＝AE：AC
＝DE：BC

② DE∥BC ならば，AD：DB＝AE：EC

③ AD：AB＝AE：AC ならば，DE∥BC

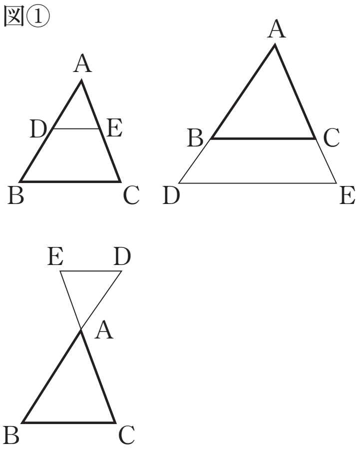
④ AD：DB＝AE：EC ならば，DE∥BC

2　平行線と線分の比

右の図②のように，$\ell /\!/ m /\!/ n$ のとき，
$p : q = p' : q'$

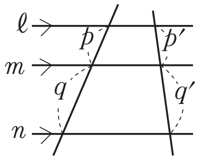
●三角形と平行線

図①



●平行線と線分の比

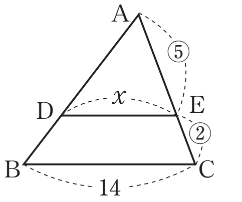
図②



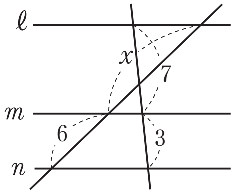
例題 1

次の図で，x の値を求めなさい。

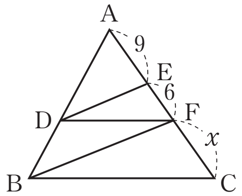
(1)　BC∥DE，AE：EC＝5：2



(2)　ℓ ∥ m ∥ n

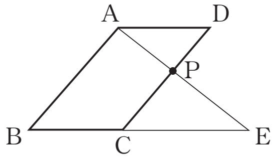


(3)　DE∥BF，DF∥BC

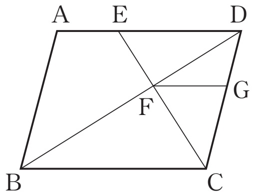


例題 2

(1)　右の図で，四角形 ABCD は，AB＝6cm，AD＝4cmの平行四辺形である。点 P は辺 CD 上にある点である。線分 AP を P の方向に延ばした直線と，辺 BC を C の方向に延ばした直線との交点を E とする。DP＝$x$cm，BE＝$y$cm とするとき，y を x の式で表せ。



(2)　右の図のように，AD＝10cm の平行四辺形 ABCD で，辺 AD を 1：2 に分ける点を E，BD と CE の交点を F，F から AD に平行な直線をひき，CD との交点を G とするとき，FG の長さを求めよ。

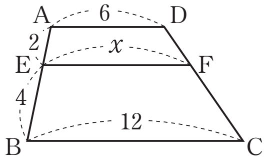


問題

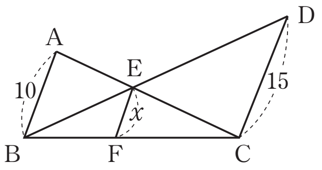
27－1

次の図で，x の値を求めなさい。

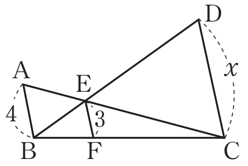
(1)　AD∥EF∥BC



(2)　AB∥EF∥DC

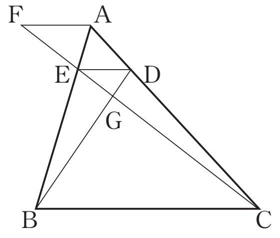


(3)　AB∥EF∥DC



27－2

AB＝6cm，BC＝7cm，CA＝8cm の三角形 ABC がある。右の図のように，辺 AC 上に AD＝2cm となる点 D をとる。点 D を通り辺 BC に平行な直線をひき，辺 AB との交点を E とする。点 A を通り辺 BC に平行な直線をひき，点 C と点 E を通る直線との交点を F とする。また，点 B と点 D を結び，線分 BD と線分 CE との交点を G とする。このとき，次の問いに答えなさい。



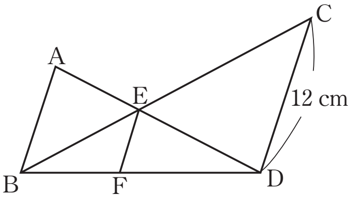
(1)　線分 AF の長さを求めよ。

(2)　△AED の面積は，△DGC の面積の何倍か。

＜ *Note* ＞

第 27 講 • 確認テスト

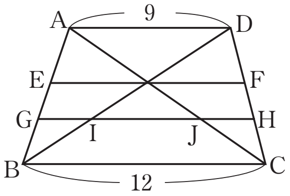
[1]　右の図で，AB ∥ EF ∥ CD，CD＝12cm である。次の問いに答えなさい。



(1)　EF＝4cm のとき，AB＝［ア］cm である。

(2)　AB＝8cm のとき，EF＝$\frac{［イウ］}{［エ］}$ cm である。

[2]　右の図で，AD ∥ EF ∥ GH ∥ BC，AG：GB＝2：1 のとき，次の問いに答えなさい。



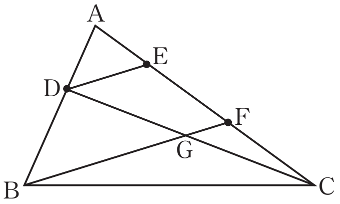
(1)　EF の長さを求めなさい。

EF＝$\frac{［オカ］}{［キ］}$

(2)　GH，IJ の長さを求めなさい。

GH＝［クケ］，IJ＝［コ］

[3]　右の図で，点 D は△ ABC の辺 AB 上の点で，AD：DB＝2：3 である。点 E，F はそれぞれ辺 AC 上の点で，DE ∥ BF，EF＝FC である。また，点 G は線分 BF と CD の交点である。BF＝x とするとき，DE，BG の長さを x を用いて表しなさい。



DE＝$\frac{［サ］}{［シ］}x$，BG＝$\frac{［ス］}{［セ］}x$

< *Note* >

第２８講・相似④ 中点連結定理

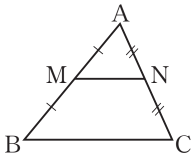
要点整理

1　中点連結定理

三角形の２辺の中点を結ぶ線分は，残りの辺に平行で，長さはその半分である。これを**中点連結定理**という。

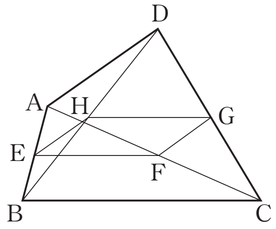
右の図の△ABC において，AM＝MB，AN＝NC ならば，MN // BC，MN＝$\frac{1}{2}$BC である。

●中点連結定理



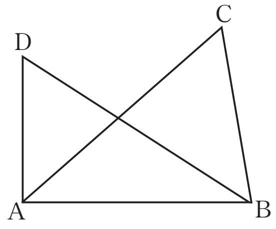
例題 1

右の図で，四角形 ABCD の辺 AB，CD の中点をそれぞれ E，G とし，対角線 AC，BD の中点をそれぞれ F，H とするとき，四角形 EFGH は平行四辺形であることを証明しなさい。



例題 2

右の図は，底辺 AB が共通の 2 つの三角形，△ABC と△ABD である。辺 AB，BC，AD の中点をそれぞれ P，Q，R とするとき，次の問いに答えなさい。



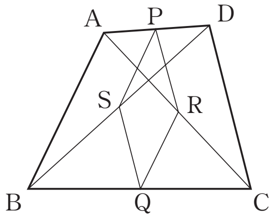
⑴　AC＝BD のとき，△PQR はどんな三角形になるか書け。また，そうなることを証明せよ。

⑵　辺 AB，BC，CA，AD，DB のいずれか 2 辺の間に，ある関係が成り立つとき，∠QPR＝90° となる。どの 2 辺の間に，どんな関係が成り立つときか書け。

問題

28－1

右の図のように，四角形 ABCD の辺 AD，BC，対角線 AC，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S とする。AB＝CD，∠ABC＝70°，∠BCD＝80° のとき，次の問いに答えなさい。

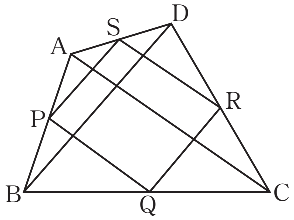


(1)　四角形 PSQR はどんな四角形か。

(2)　∠SPR の大きさを求めよ。

＜ *Note* ＞

第28講・確認テスト



[1]　右の図の四角形 ABCD において，4点 P，Q，R，S はそれぞれ辺 AB，BC，CD，DA の中点である。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　四角形 PQRS は平行四辺形である。これを証明するときの根拠となることがらを下から選ぶと，[ア] である。

① 1組の向かい合う辺が平行である。

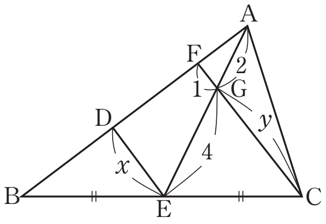
② 対角線が，それぞれの中点で交わる。

③ 2組の向かい合う角がそれぞれ等しい。

④ 1組の向かい合う辺が等しくて平行である。

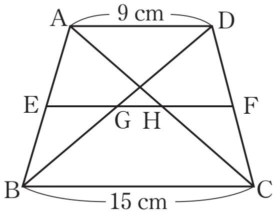
(2)　AC⊥BD のとき，四角形 PQRS は [イ] である。また，AC＝BD のとき，四角形 PQRS は [ウ] である。それぞれ適するものを下から選び，記号で答えなさい。

① 台形　　② ひし形　　③ 長方形　　④ 正方形



[2]　右の図において，BE＝EC，DE∥FC のとき，x，y の値を求めなさい。

x＝[エ]，y＝[オ]



[3]　右の図において，点 E が辺AB の中点であり，AD∥EF∥BC，AD＝9cm，BC＝15cm のとき，EF，GH の長さを求めなさい。

EF＝[カキ] cm，GH＝[ク] cm

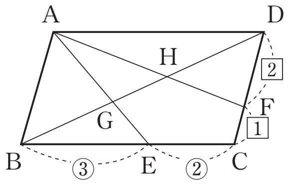
< *Note* >

第29講・相似⑤ 相似の融合問題

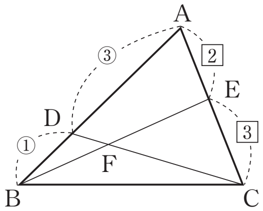
例題 1

次の問いに答えなさい。

(1)　四角形 ABCD は平行四辺形であり，BE：EC＝3：2，DF：FC＝2：1 のとき，BG：GH：HD を求めよ。



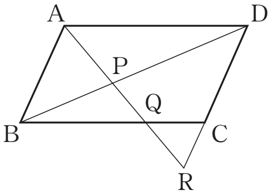
(2)　△ABC において，AD：DB＝3：1，AE：EC＝2：3 のとき，BF：FE を求めよ。



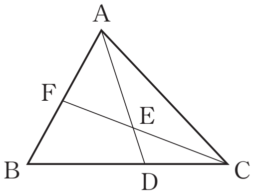
例題 2

次の問いに答えなさい。

(1)　右の図のように，平行四辺形 ABCD の対角線 BD 上に，BP：PD＝2：3 である点 P をとる。直線 AP が辺 BC と交わる点を Q，辺 CD の延長と交わる点を R とするとき，PQ：QR の比を最も簡単な整数の比で答えよ。

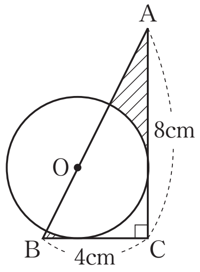


(2)　右の図のような△ABC において，BD：DC＝3：2，AE：ED＝3：1 である。このとき，AF：FB を最も簡単な整数の比で答えよ。



例題 3

右の図は，∠C＝90° の直角三角形 ABC の辺 AB 上に中心 O をとり，2 辺 AC，BC に接するように円をかいたものである。AC＝8cm，BC＝4cm のとき，次の問いに答えよ。



⑴　円 O の半径を求めよ。

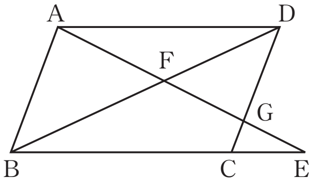
⑵　斜線部分 2 ケ所の面積の和を求めよ。

問題

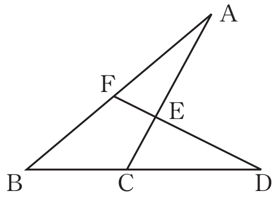
29－1

次の問いに答えなさい。

(1)　四角形 ABCD は平行四辺形であり，BC：CE＝3：1のとき，AF：FG：GE を求めよ。

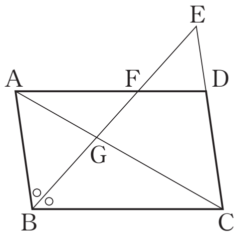


(2)　AF：FB＝5：3，BC：CD＝2：3のとき，DE：EF を求めよ。



29－2

右の図のように，AB＝8cm，BC＝12cm，AC＝15cm の平行四辺形 ABCD がある。∠B の二等分線と辺 CD の延長との交点を E とし，BE と AD，BE と AC の交点をそれぞれ F，G とする。次の問いに答えなさい。



(1)　AF の長さを求めよ。

(2)　AG：GC を最も簡単な整数の比で表せ。

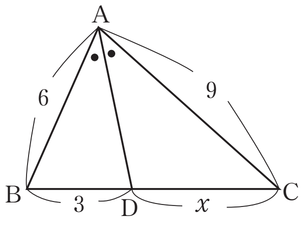
(3)　△BCG と平行四辺形 ABCD の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

(4)　EF：FG を最も簡単な整数の比で表せ。

＜ *Note* ＞

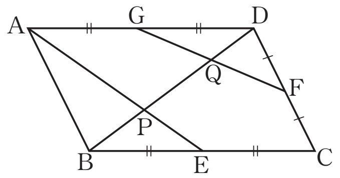
第29講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。



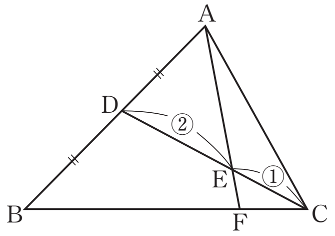
⑴　右の図で，点 D は△ABC の∠BAC の二等分線が辺 BC と交わる点である。このとき，x の値を求めなさい。

$x=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$



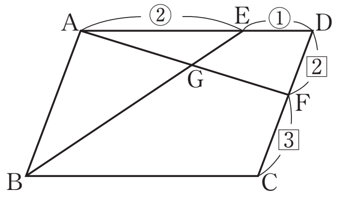
⑵　右の図で，四角形 ABCD は平行四辺形である。辺 BC，CD，DA の中点をそれぞれ E，F，G とし，対角線 BD と AE，GF が交わる点をそれぞれ P，Q とする。BD＝12cm のとき，PQ の長さを求めなさい。

PQ＝［ウ］cm



［2］　右の図の△ABC で，点 D は辺 AB の中点である。線分 CD 上に，CE：ED＝1：2 となる点 E をとり，AE の延長が辺 BC と交わる点を F とする。このとき，BF：FC を最も簡単な整数の比で表しなさい。

BF：FC＝［エ］：［オ］



［3］　右の図の四角形 ABCD は平行四辺形である。2 点 E，F はそれぞれ辺 AD，CD 上の点で，AE：ED＝2：1，DF：FC＝2：3 である。AF と BE の交点を G とする。このとき，次の問いに答えなさい。

⑴　BG：GE を最も簡単な整数の比で表しなさい。

BG：GE＝［カキ］：［ク］

⑵　AG：GF を最も簡単な整数の比で表しなさい。

AG：GF＝［ケコ］：［サ］

< *Note* >

第７章　三平方の定理

第３０講・三平方の定理①　三平方の定理の基本

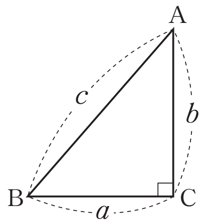
要点整理

１　三平方の定理

直角三角形の直角をはさむ２辺の長さをa，bとし，斜辺の長さをcとすると，次の関係が成り立つ。

$$a^2+b^2=c^2$$

この定理を**三平方**（さんへいほう）**の定理**，または，**ピタゴラスの定理**という。



２　三平方の定理の逆

３辺の長さがa，b，cである三角形で，

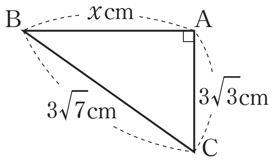
$$a^2+b^2=c^2$$

が成り立つならば，その三角形は，長さがcの辺を斜辺とする直角三角形である。

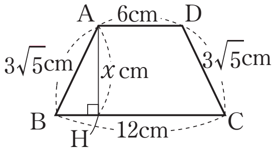
例題 1

次の図で，x の値を求めなさい。

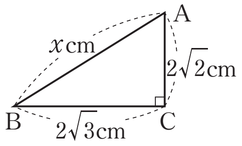
(1)



(2)　AD∥BC

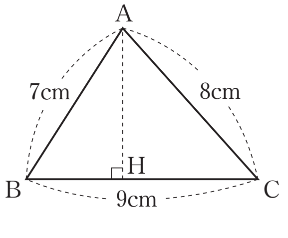


(3)　次の図で，x の値を求めなさい。



例題 2

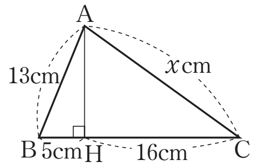
右の図のような，AB＝7cm，BC＝9cm，CA＝8cm の三角形 ABC がある。頂点 A から辺 BC に垂線 AH をひくとき，AH の長さを求めなさい。



問題

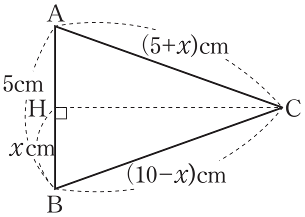
30－1

次の図で，x の値を求めなさい。



30－2

右の図のような，AB＝5cm，BC＝$(10-x)$cm，CA＝$(5+x)$cm の三角形がある。頂点Cから辺ABに垂線CHをひくと，BH＝$x$cm となった。このとき，x の値を求めなさい。

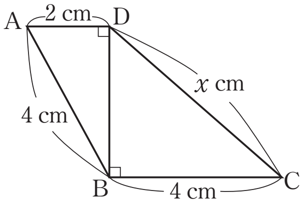


＜ *Note* ＞

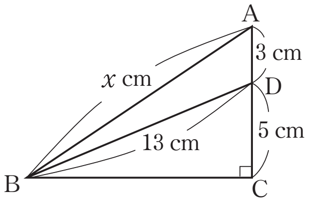
第 30 講 • 確認テスト

［1］　次の図で，x の値を求めなさい。

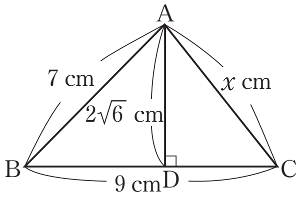
（1）　$x = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$



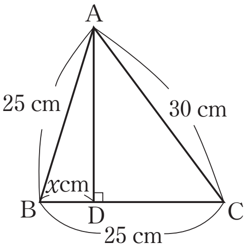
（2）　$x = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エオ}}}$



（3）　$x = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キク}}}$



［2］　右の図の△ ABC は，AB＝BC＝25cm，CA＝30cm の二等辺三角形で，A から BC にひいた垂線を AD とする。このとき，次の問いに答えなさい。



（1）　BD＝$x$cm とするとき，AD^2 を x を用いた式で表しなさい。

$AD^2 = \boxed{\text{ケコサ}} - x^2$

（2）　AD の長さを求めなさい。

$AD = \boxed{\text{シス}}$ cm

< *Note* >

第31講・三平方の定理②
特別な直角三角形

要点整理

1　特別な直角三角形の辺の比

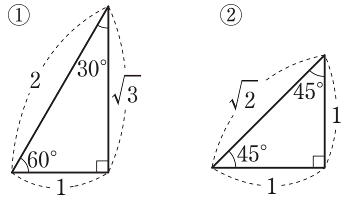
① 鋭角が 30° と 60° の直角三角形

……$1 : 2 : \sqrt{3}$

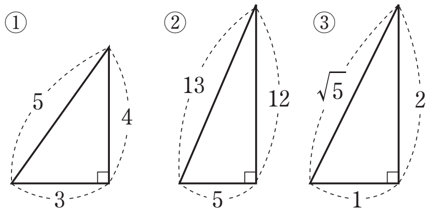
② 鋭角がどちらも 45° の直角三角形

……$1 : 1 : \sqrt{2}$

●特別な直角三角形の辺の比



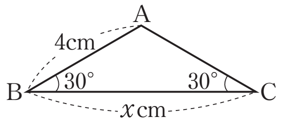
●覚えると便利な直角三角形の辺の比



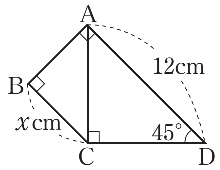
例題 1

次の図で，x の値を求めなさい。

(1)

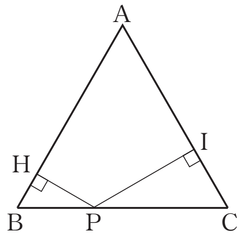


(2)



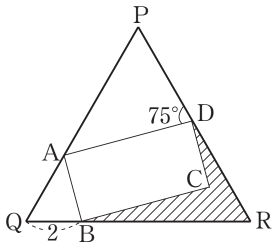
例題 2

右図において，１辺の長さが２の正三角形 ABC の辺 BC 上の点 P から，辺 AB，AC にそれぞれ垂線 PH，PI を下ろすとき，PH＋PI の値を求めなさい。



例題 3

右の図のように正三角形 PQR があり，辺 PQ，QR，RP 上にそれぞれ点 A，B，D をとる。また，AD＝2AB，∠PDA＝75°，QB＝2 をみたす長方形 ABCD をつくるとき，次の問いに答えなさい。



⑴　∠QAB と∠CBR の大きさをそれぞれ求めよ。

⑵　線分 AQ と AB の長さをそれぞれ求めよ。

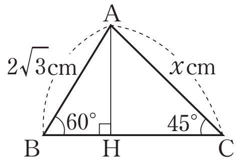
⑶　正三角形 PQR の１辺の長さを求めよ。

⑷　斜線部分の面積を求めよ。

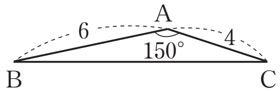
問題

31－1　次の問いに答えなさい。

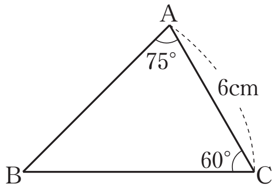
⑴　右の図で，x の値を求めなさい。



⑵　右の図の△ABC の面積を求めよ。

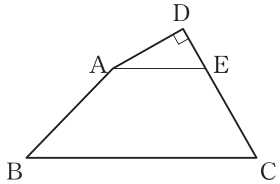


⑶　右の図のような△ABC がある。∠A＝75°，∠C＝60°で，AC の長さは 6cmである。AB の長さとBC の長さを求めよ。



31－2

右の図の四角形 ABCD において辺 CD 上に，AE∥BC となる点 E をとる。∠C＝60°，∠D＝90°，BC＝$15\sqrt{6}$，CE＝$8\sqrt{6}$，DE＝$3\sqrt{6}$のとき，次の問いに答えなさい。



⑴　AE の長さを求めよ。

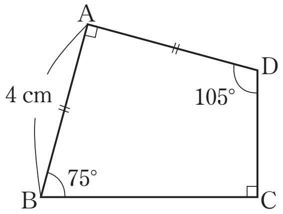
⑵　台形 ABCE の高さを求めよ。

⑶　四角形 ABCD の面積を求めよ。

＜ *Note* ＞

第31講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

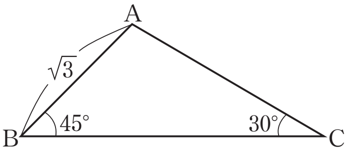


(1)　右の図で，BC，CD の長さを求めなさい。

BC＝［ア］$\sqrt{［イ］}$ cm,

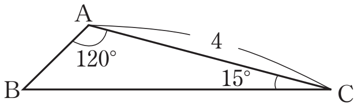
CD＝［ウ］$\sqrt{［エ］}$ cm

(2)　右の図の△ ABC の面積を求めなさい。



△ABC＝$\dfrac{［オ］\sqrt{［カ］}+［キ］}{［ク］}$ cm²

［2］　右の図の△ABC について，次の問いに答えなさい。



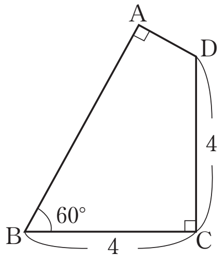
(1)　BA の延長に C からひいた垂線の足を H とするとき，AH，CH の長さを求めなさい。

AH＝［ケ］，CH＝［コ］$\sqrt{［サ］}$

(2)　AB の長さを求めなさい。

AB＝［シ］$\sqrt{［ス］}$ －［セ］

［3］　右の図で，AB の長さ，四角形 ABCD の面積を求めなさい。



AB＝［ソ］$\sqrt{［タ］}$ ＋［チ］

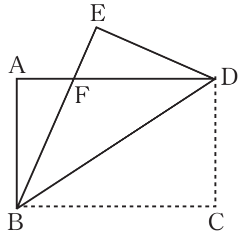
四角形 ABCD＝［ツテ］

< *Note* >

第３２講・三平方の定理③ 図形の折り返し

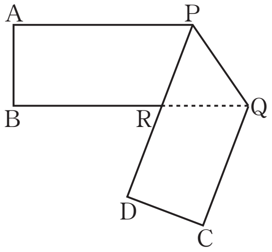
例題 1

右の図のように，AB＝4cm，BC＝6cm の長方形 ABCD がある。いま，対角線 BD を折り目として，△DBC を A の方へ折り曲げて重ねた。点 C の移った点を E，EB と AD の交点を F とするとき，FD の長さを求めなさい。

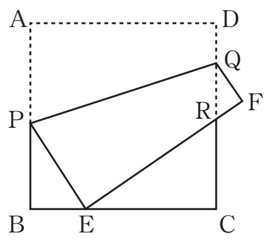


例題 2

右の図は，幅 8cm のテープを，PQ を折り目として，折り返したものである。PQ の長さが 10cm のとき，2 重に重なった部分，△PQR の面積を求めよ。



例題 3



右の図のように1辺の長さ9の正方形ABCDを頂点Aが辺BCを1：2の比にわける点Eに重なるように折り，折り目の線をPQとする。折ったあとの頂点Dの位置をFとし，EFとCDの交点をRとする。このとき，次の問いに答えなさい。

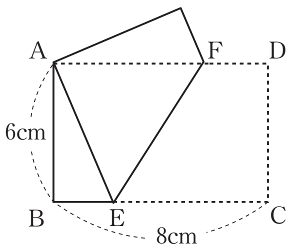
⑴　BPの長さを求めよ。

⑵　四角形PERQの面積を求めよ。

問題

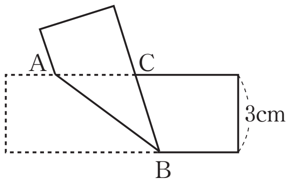
32－1

右の図のように，AB＝6cm，BC＝8cm の長方形 ABCD を，頂点 C が頂点 A に重なるように折り，そのときの折り目を EF とする。このとき，BE の長さを求めなさい。



32－2

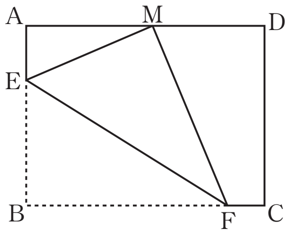
縦 3cm の長方形の紙を，右図のように線分 AB を折り目として折り返したとき，重なった部分の三角形を△ABC とする。AB の長さが 5cm のとき，△ABC の面積を求めなさい。



< *Note* >

第32講・確認テスト

[1]　右の図の四角形 ABCD は，AB＝6，AD＝8 の長方形である。この長方形 ABCD を EF を折り目として，頂点 B が辺 AD の中点 M と重なるように折り返す。次の問いに答えなさい。



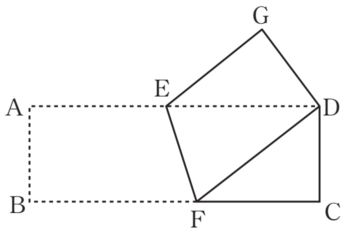
(1)　AE の長さを求めなさい。

AE＝$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

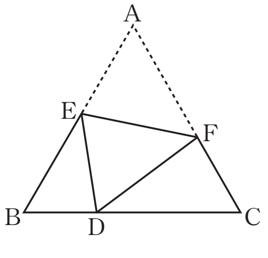
(2)　MF の長さを求めなさい。

MF＝$\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$

[2]　右の図は，AB＝6cm，BC＝18cm の長方形 ABCD を，頂点 B が頂点 D と重なるように折り返したものである。このときの折り目を EF，頂点 A が移った点を G とすると，FC の長さは $\boxed{カ}$ cm，D から EF にひいた垂線の長さは $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{クケ}}$ cm である。



[3]　右の図の△ ABC は，1 辺が 9cm の正三角形である。辺 BC 上に BD＝3cm となる点 D をとり，頂点 A が D と重なるように折り返す。このときの折り目を EF とする。次の問いに答えなさい。



(1)　BE の長さを求めなさい。

BE ＝$\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ cm

(2)　CF の長さを求めなさい。

CF ＝$\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}$ cm

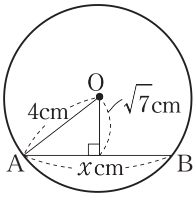
< *Note* >

第33講・三平方の定理④ 円と三平方の定理

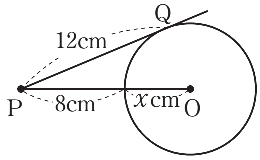
例題 1

次の図で，x の値を求めなさい。ただし，点Ｏは円の中心を表している。

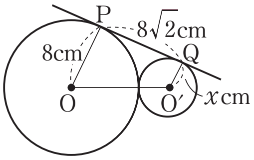
(1)



(2)　PQ は円Ｏの接線

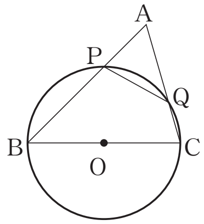


(3)　PQ は２円の接線



例題 2

右の図のように，△ABC の辺 BC を直径とする円Ｏと辺 AB，AC との交点をそれぞれ P，Q とする。∠PAQ = 60°，BP = $2\sqrt{6}$，PQ = 3 とするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　AP：AC を求めよ。

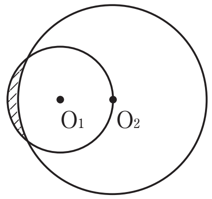
(2)　BC の長さを求めよ。

(3)　PA の長さを求めよ。

(4)　CQ の長さを求めよ。

例題 3

右の図のように，半径3の円O_1が半径$3\sqrt{3}$の円O_2の中心を通っている。斜線の部分を図形Sとするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　Sの周りの長さを求めよ。

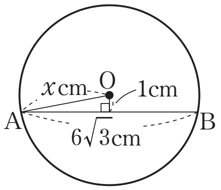
(2)　Sの面積を求めよ。

問題

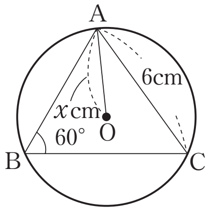
33－1

次の図で，x の値を求めなさい。

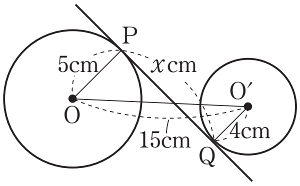
(1)



(2)



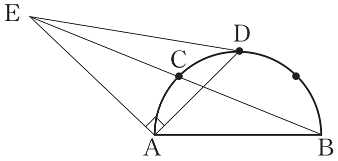
(3)　PQ は２円の共通接線



33－2

次の問いに答えなさい。

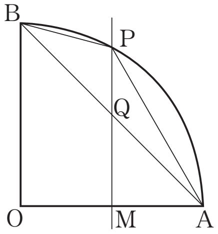
(1)　右の図のように，線分 AB を直径とする半径 2cm の半円がある。$\overset{\frown}{AB}$を４等分する点のうち，点 A に近い方から順に C, D とするとき，次の問いに答えよ。



① ∠ABC の大きさを求めよ。

② BC の延長上に，∠DAE ＝ 90° となるように点 E をとる。線分 DE の長さを求めよ。

(2)　右の図は，半径 4cm，中心角 90° のおうぎ形である。線分 OA の中点を M とし，線分 OA の垂直二等分線と$\overset{\frown}{AB}$との交点を P とする。点 A と点 B，点 A と点 P，点 B と点 P をそれぞれ結ぶ。線分 AB と線分 PM の交点を Q とする。次の問いに答えよ。



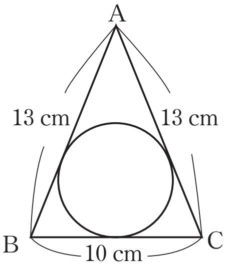
① ∠BAP の大きさは何度か。

② 線分 PQ の長さは何 cm か。

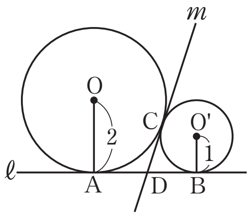
< *Note* >

第33講・確認テスト

[1] 次の問いに答えなさい。

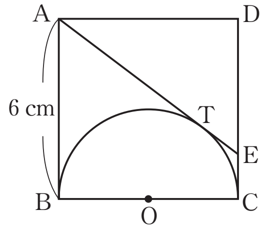


(1) 右の図のように，AB＝AC＝13cm，BC＝10cm の△ABC に円が内接している。この円の半径は $\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ cm である。



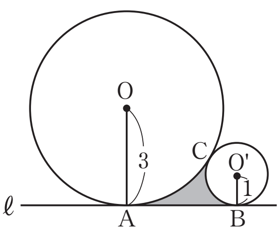
(2) 右の図のように，半径２の円 O と半径１の円 O´が点 C で接している。直線 ℓ は２つの円 O，O´にそれぞれ点 A，B で接する共通外接線であり，直線 m は点 C で２つの円 O，O´に接する共通内接線である。また，点 D は直線 ℓ と m の交点である。このとき，CD の長さを求めなさい。

CD ＝$\sqrt{\boxed{エ}}$



(3) 右の図のように，１辺が 6cm の正方形 ABCD と，その辺 BC を直径とする半円 O がある。線分 AE は半円 O の接線であり，点 T は接点である。このとき，DE の長さを求めなさい。

DE ＝$\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ cm

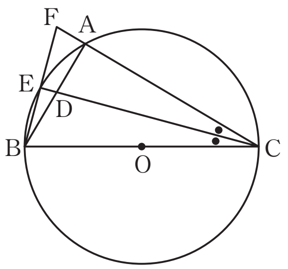


[2] 右の図のように，半径３の円 O と半径１の円 O´が点 C で接している。また，円 O，O´はそれぞれ点 A，B で直線 ℓ と接している。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) AB の長さは $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ である。

(2) 斜線部分の面積は $\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}-\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\pi$ である。

[3]　右の図のように，△ABC が円 O に内接しており，BC は円 O の直径である。∠ACB の二等分線が AB と交わる点を D，円周と交わる点を E とする。また，CA の延長と BE の延長が交わる点を F とする。AC=7，BC=8 のとき，次の問いに答えなさい。



(1)　AD の長さを求めなさい。

$$AD = \frac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソタ}}}{\boxed{チツ}}$$

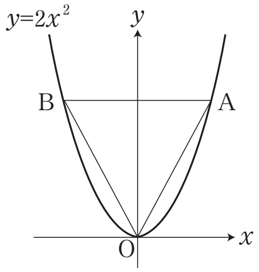
(2)　CE の長さを求めなさい。

$$CE = \boxed{テ}\sqrt{\boxed{トナ}}$$

第３４講・三平方の定理⑤ 関数と三平方の定理

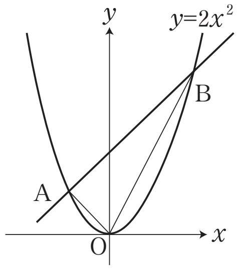
例題 1

右の図のように，放物線 $y = 2x^2$ 上に y 座標の等しい２点 A，B がある。△OAB が正三角形になるとき，A の座標を求めなさい。



例題 2

右の図のように，２点 A，B は放物線 $y = 2x^2$ 上にあり，２点 A，B の x 座標はそれぞれ -1，２である。このとき，次の問いに答えなさい。



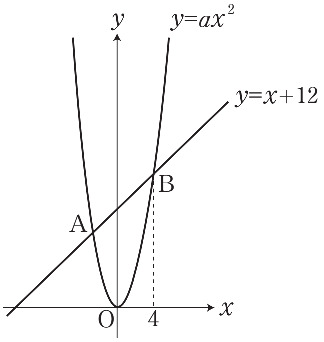
⑴　△AOB の面積を求めよ。

⑵　線分 AB の長さを求めよ。

⑶　点 O から直線 AB に垂線 OH をひくとき，線分 OH の長さを求めよ。

例題 3

右の図のように，放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = x+12$ が 2 点 A，B で交わっている。点 B の x 座標が 4 のとき。次の問いに答えなさい。



(1)　点 A の座標を求めよ。

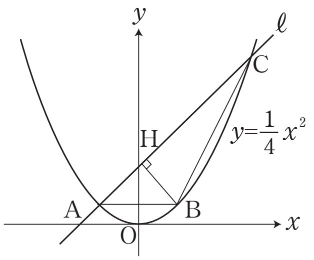
(2)　AB の長さを求めよ。

(3)　直線 AB に平行で点 O を通る直線を ℓ とする。点 B から直線 ℓ にひいた垂線と直線 ℓ との交点を C とするとき，BC の長さを求めよ。

問題

34－1

右の図で，点 A，B は放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ 上の点で，A の x 座標は -2，線分 AB は x 軸に平行である。また，点 C は A を通る直線 ℓ と放物線との交点で，C の x 座標は正の数である。△ABC の面積が 16 であるとき，次の問いに答えなさい。



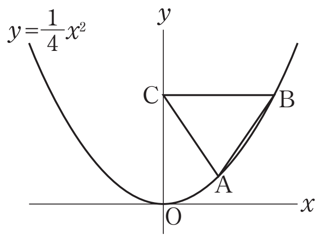
⑴　点 C の座標を求めよ。

⑵　点 B から直線 ℓ におろした垂線と ℓ との交点を H とする。BH の長さを求めよ。

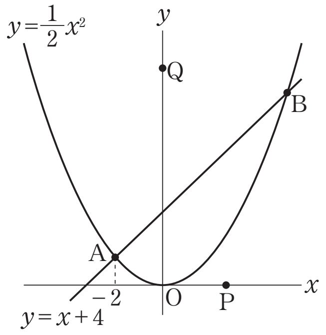
＜ *Note* ＞

第34講・確認テスト

［1］　右の図で，放物線は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。2点A，Bはこのグラフ上の点，点Cは y 軸上の点であり，線分BCは x 軸に平行である。△ABCが正三角形となるとき，点Aの x 座標は $\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$ である。ただし，点Aの x 座標は正とする。



［2］　右の図で，放物線は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ，直線は関数 $y=x+4$ のグラフである。2点A，Bは，放物線と直線の交点で，Aの x 座標は -2 である。また，x 軸上の点をP，y 軸上の点をQとする。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　点Bの座標は，($\boxed{エ}$ ， $\boxed{オ}$) である。

(2)　△PABが PA＝PB の二等辺三角形となるとき，Pの x 座標は $\boxed{カ}$ である。

(3)　PA＋PBの長さが最小となるとき，Pの x 座標は $-\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

(4)　△ABQが∠AQB＝90°の直角三角形となるとき，Qの y 座標は $\boxed{ケ}\pm\sqrt{\boxed{コサ}}$ である。

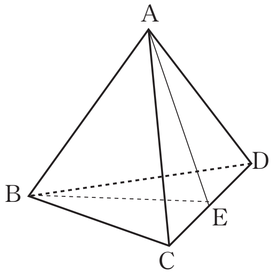
< *Note* >

第35講・三平方の定理⑥ 立体図形と三平方の定理

例題 1

1辺の長さが6cmの正四面体ABCDがある，辺CDの中点をEとするとき。次の問いに答えよ。

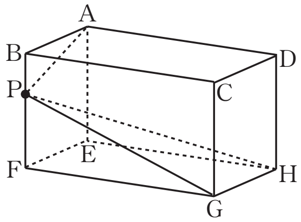
(1)　△ABEの面積を求めよ。



(2)　(1)を利用して，正四面体ABCDの体積を求めよ。

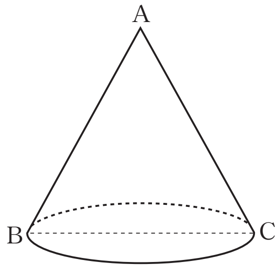
例題 2

右の図は，A，B，C，D，E，F，G，Hを頂点とする直方体で，AB = 2cm，AD = 6cm，AE = 4cmである。また，Pは辺BF上の点で，AP+PGの大きさはPの位置によって変化する。AP+PGの大きさが最小になるとき，PHの長さを求めなさい。



例題 3

右の図は，線分 BC を直径とする円を底面とし，点 A を頂点とする円すいである。AB = 6，BC = 6 のとき，次の問いに答えなさい。



(1)　この円すいの側面積を求めよ。

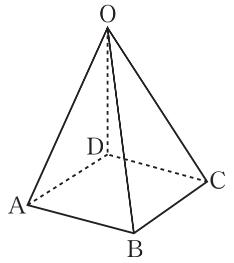
(2)　この円すいの中に入る球のうち，体積が最大のものを O とする。球 O の半径を求めよ。

(3)　球 O と母線 AB との接点を D とする。側面上の C から D への最短経路の長さを求めよ。

問題

35－1

右の図は AB ＝$\sqrt{2}$ cm の正方形を底面とする OA ＝ 2cm の正四角すいである。次の問いに答えなさい。

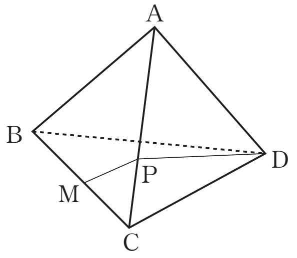


⑴　この立体の体積を求めよ。

⑵　三角すい OABC において，△OBC を底面としたときの高さを求めよ。

35－2

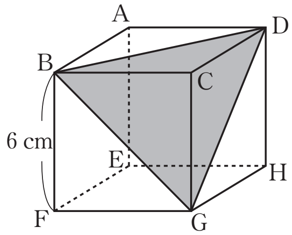
右の図のように，1 辺の長さが 2cm の正四面体で，辺 BC の中点を M とする。辺 AC 上に点 P をとり，DP＋PM が最も短くなるようにするとき，その長さを求めなさい。



＜ *Note* ＞

第35講・確認テスト

［1］　右の図の立体 ABCD－EFGH は，１辺が 6cm の立方体である。この立方体を，３点 B，D，G を通る平面で切断するとき，次の問いに答えなさい。

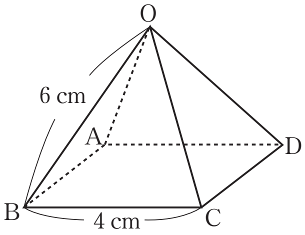


(1)　切断面の△ BDG の面積は［アイ］$\sqrt{［ウ］}$ cm^2 である。

(2)　頂点 C から面 BDG にひいた垂線の長さは

［エ］$\sqrt{［オ］}$ cm である。

［2］　右の図のような，OA＝OB＝OC＝OD＝6cm，AB＝BC＝CD＝DA＝4cm の正四角錐 O－ABCD がある。これについて，次の問いに答えなさい。

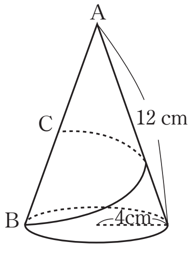


(1)　この立体の表面積は

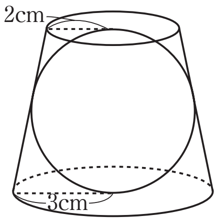
［カキ］$\sqrt{［ク］}$＋［ケコ］(cm^2)である。

(2)　この立体の体積は $\dfrac{［サシ］\sqrt{［ス］}}{［セ］}$ cm^3 である。

［3］　右の図は，母線 AB の長さが 12cm，底面の半径が 4cm の円錐である。AB の中点を C とし，B から C まで円錐の側面を１周するようにひもをかける。ひもの長さが最も短くなるときのひもの長さは［ソ］$\sqrt{［タ］}$ cm である。



［4］　右の図のように，底面の半径が 3cm の円錐を，底面に平行な平面で切ったところ，切り口の円の半径が 2cm となった。この立体に球が内接しているとき，この球の半径は $\sqrt{［チ］}$ cm である。



< *Note* >

テキスト解答

第１章　式の計算

第１講・式の計算①　式の展開

例題 1

(1) $4x-3y$　(2) $-9b+6a$　(3) $6x^2+11x-10$　(4) $x^2+14x+48$

(5) x^2-6x+9　(6) x^2-49

解説

(1) 与式 $=\dfrac{12xy}{3y}-\dfrac{9y^2}{3y}=4x-3y$

(2) 与式 $=(6ab^2-4a^2b)\times\left(-\dfrac{3}{2ab}\right)=-9b+6a$

逆数にしてかける。

(3) 与式 $=6x^2+15x-4x-10=6x^2+11x-10$

同類項をまとめて簡単にする。

(4) 公式１より，与式 $=x^2+14x+48$

(5) 公式３より，与式 $=x^2-6x+9$

(6) 公式４より，与式 $=x^2-49$

例題 2

(1) -25　(2) $3x^2+32xy+128y^2$

乗法公式を利用して展開し，同類項はまとめて簡単にする。また，符号に注意してかっこをはずす。

解説

(1) 与式 $=a^2-4a-21-(a^2-4a+4)$

$=a^2-4a-21-a^2+4a-4$

$=-25$

符号に注意する。

(2) 与式 $=4(x^2+8xy+16y^2)-(x^2-64y^2)$

$=4x^2+32xy+64y^2-x^2+64y^2$

$=3x^2+32xy+128y^2$

例題 3

(1) 9996　(2) 40401

解説

(1) $98\times102=(100-2)(100+2)$

$=100^2-2^2=10000-4=9996$

(2) $201^2=(200+1)^2=200^2+2\times200\times1+1^2$

$=40000+400+1=40401$

1－1

(1) $\boldsymbol{8a+1}$　(2) $\boldsymbol{-2x+4y^2}$　(3) $\boldsymbol{3x^2+x-10}$　(4) $\boldsymbol{9x^2+6x+1}$

(5) $\boldsymbol{x^2+4y^2}$　(6) $\boldsymbol{4x+1}$　(7) $\boldsymbol{x+8}$　(8) $\boldsymbol{4x-24}$

解説

(2) 与式 $=(3x^2y-6xy^3)\times\left(-\dfrac{2}{3xy}\right)=-2x+4y^2$

(6) 与式 $=x^2+2x+1-(x^2-2x)=4x+1$

(7) 与式 $=x^2-4-(x^2-x-12)=x+8$

(8) 与式 $=x^2-2x-15-(x^2-6x+9)=4x-24$

1－2

5

1－3

1

$2002=a$ とおくと，与式 $=a^2-(a-1)(a+1)=a^2-a^2+1=1$

第2講・式の計算②　式の展開と素因数分解

例題 1

(1)　$y=60$　　(2)　$a=6$

解説

(1)　$120=2^3\times3\times5$ より，最小の x は，$2\times3\times5=30$　このとき，
$y^2=2^4\times3^2\times5^2=(2^2\times3\times5)^2=60^2$　$y=60$

(2)　$1350=2\times3^3\times5^2$　各素数の指数が偶数になるようにすればよいので，最小の a は，
$2\times3=6$

例題 2

(1)　$p=20$，$q=396$　　(2)　①　5^2-4^2　　②　$p=\dfrac{n-1}{2}$

解説

(2)　②　$n=(p+1)^2-p^2$ より，$n=2p+1$　これを p について解いて，$p=\dfrac{n-1}{2}$

2−1

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$$

解説

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

2−2

(1)　110　　(2)　$x=48$

解説

(1)　$48510=2\times3^2\times5\times7^2\times11$ より，求める数は，$2\times5\times11=110$

(2)　a を素数とすると，$x+1=a^2$　ここで，$10\leqq x\leqq 99$ より，$11\leqq a^2\leqq 100$　これを満たす素数 a は5と7のみ。$a=5$ のとき $x=5^2-1=24$，$a=7$ のとき $x=7^2-1=48$
このうち，5でわって3余る数であるのは，48

第３講・式の計算③ 因数分解

例題 1

（1）$3xy(3y-4x+1)$　（2）$(a+5)(a-9)$　（3）$(x-6y)^2$　（4）$(9a+5b)(9a-5b)$

（5）$3a(x-4y)(x-8y)$　（6）$(x+2)(x-4)$

解説

（1）共通な因数でくくる。

与式 $=3xy(3y-4x+1)$

１を忘れないように。

（2）公式１′を利用する。

与式 $=(a+5)(a-9)$

（3）公式３′を利用する。

与式 $=(x-6y)^2$

（4）公式４′を利用する。

与式 $=(9a+5b)(9a-5b)$

（5）まず，共通な因数でくくる。

与式 $=3a(x^2-12xy+32y^2)$

$=3a(x-4y)(x-8y)$

（6）一度，展開する。

与式 $=x^2-2x-3-5$

$=x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$

一度，展開してしまうこともある。

例題 2

（1）600　（2）2500

解説

（1）$53^2-47^2=(53+47)(53-47)$

$=100\times6=600$

（2）$22^2+2\times22\times28+28^2=(22+28)^2=50^2=2500$

3－1

（1）$3(x+3y)(x-5y)$　（2）$2a(m-1)(m-2)$　（3）$m(x+3)(x-2)$

（4）$2b(a+2)^2$　（5）$2(ac+3b)(ac-3b)$　（6）$(x-3)(x-7)$

（7）$(x+5)(x-3)$　（8）$(a+3b)(a-2b)$　（9）$(x+1)(x-3)$

解説

（6）与式 $=(x-5)^2-2^2=\{(x-5)+2\}\{(x-5)-2\}=(x-3)(x-7)$

（7），（8），（9）ともに，一度展開してから，因数分解する。

（7）与式 $=x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$

（8）与式 $=a^2+ab-2b^2-4b^2=a^2+ab-6b^2=(a+3b)(a-2b)$

（9）与式 $=3x^2+3x-2x^2-5x+3-6=x^2-2x+3=(x+1)(x-3)$

3－2

4

第４講・式の計算④ 複雑な因数分解

例題 1

(1)　$(a-3)(b-2)$　　(2)　$(x+3y-3)(x-3y-3)$

(3)　$(a+b-2c)(a-b+2c)$　　(4)　$(y-z)(x-y+z)$

(5)　$(x-y)(x+y-1)$　　(6)　$(x+y-1)^2$

解説

(2)　3項と1項に分け，

与式 $=(x^2-6x+9)-9y^2=(x-3)^2-(3y)^2=(x-3+3y)(x-3-3y)$

(4)　低い次数の文字 x で整理する。

与式 $=(xy-xz)+2yz-y^2-z^2=x(y-z)-(y-z)^2=(y-z)\{x-(y-z)\}=(y-z)(x-y+z)$

(5)　与式 $=(x^2-y^2)-x+y=(x+y)(x-y)-(x-y)$

$=(x-y)(x+y-1)$

(6)　与式 $=(x^2+2xy+y^2)-2x-2y+1=(x+y)^2-2(x+y)+1$

$=\{(x+y)-1\}^2=(x+y-1)^2$

例題 2

説明　n を自然数とすると，長方形の床の縦，横に並ぶタイルの枚数はそれぞれ $2n$ 枚，$(2n+2)$ 枚だから，この床のタイルの枚数より1枚多いタイルの枚数は，$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$（枚）となり，$n$ は自然数なので，$2n+1$ は奇数。

よって，タイルが1辺に奇数枚並ぶように正方形の床にすき間なくしきつめることができる。

4-1

(1)　$(2x+y-1)(2x-y+1)$

(2)　$(x+2y-2)(x-2y+2)$

(3)　$(a-1)(a-b+3)$

(4)　$(a-b)(a+b-c)$

(5)　$(x+1)(x-1)(y+2)(y-2)$

(6)　$(x-2y+2)(x-2y-1)$

解説

(1)　1項と3項に分け,

与式 $=4x^2-(y^2-2y+1)=(2x)^2-(y-1)^2=\{2x+(y-1)\}\{2x-(y-1)\}$

(2)　1項と3項に分け,

与式 $=x^2-(4y^2-8y+4)=x^2-4(y-1)^2=\{x+2(y-1)\}\{x-2(y-1)\}$

(3)　低い次数の文字 b で整理する。

与式 $=(-ab+b)+(a^2+2a-3)=-b(a-1)+(a+3)(a-1)=(a-1)(-b+a+3)$

(4)　低い次数の文字 c で整理する。

与式 $=(-ac+bc)+(a^2-b^2)=-c(a-b)+(a+b)(a-b)=(a-b)(-c+a+b)$

(5)　x^2 でくくる。(y^2 でもよい。)

与式 $=x^2(y^2-4)-(y^2-4)=(y^2-4)(x^2-1)=(x+1)(x-1)(y+2)(y-2)$

(6)　与式 $=(x^2-4xy+4y^2)+(x-2y)-2=(x-2y)^2+(x-2y)-2$

$=\{(x-2y)+2\}\{(x-2y)-1\}$

4-2

2個 ($n=5,\ 7$)

第５講・式の計算⑤ 展開・因数分解の利用

例題 1

(1)　n を整数とすると，連続した２つの奇数は $2n-1,\ 2n+1$ と表される。（$2n+1,\ 2n+3$ でもよい。）

これらの平方の差は，$(2n+1)^2-(2n-1)^2=4n^2+4n+1-(4n^2-4n+1)=8n$（8の整数倍。）

よって，8の倍数になる。

(2)　証明 最も小さい整数を n とするとき，連続する３つの整数は，n，$n+1$，$n+2$ と表される。

$(n+2)(n+1)-n^2+1=n^2+3n+2-n^2+1=3n+3=3(n+1)$

$n+1$ は整数だから $3(n+1)$ は３の倍数である。

例題 2

(1)　**100**　　(2)　**−45**

解説

(1)　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=10^2=100$

(2)　$3x^2-3y^2=3(x^2-y^2)=3(x+y)(x-y)=3\times(-3)\times5=-45$（式を因数分解してから数値を代入。）

5−1

証明 n を整数とすると，連続した３つの奇数は，$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$ と表せるから，これら３つの奇数の２乗の和に１を加えた数は，

$(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2+1=12n^2+12n+12=12(n^2+n+1)$

n^2+n+1 は整数なので，$12(n^2+n+1)$ は12の倍数である。

5−2

(1)　**2**　　(2)　**1**

解説

(1)　与式 $=(x+y)^2-(x+y)=(x+y)(x+y-1)=2\times(2-1)=2$

(2)　与式 $=(a^2-2ab+b^2)-3a+3b+3=(a-b)^2-3(a-b)+3=1-3+3=1$

第２章　平方根

第６講・平方根①　平方根

例題 1

(1)　$x=10$　　(2)　$a=21$

解説

(1)　$90=2\times3^2\times5$　各素数の指数が偶数になるようにすればよいので，最小の x は，
$x=2\times5=10$

（$a>0$ のとき，$\sqrt{a^2}=a$ を利用。）

(2)　$525=3\times5^2\times7$　各素数の指数が偶数になるようにすればよいので，最小の a は，
$a=3\times7=21$

例題 2

(1)　4 個　　(2)　$n=2,\ 12,\ 18,\ 20$

解説

(1)　$10-n$ が 0，1，4，9 のときで，n は 4 個ある。

(2)　$40-2n$ は，0 以上 40 未満の偶数になるから，$40-2n$ が，0，2^2，4^2，6^2 のときである。$n=2,\ 12,\ 18,\ 20$

6－1

$n=210$

解説

$\dfrac{224}{135}=\dfrac{2^5\times7}{3^3\times5}=\dfrac{2^4\times2\times7}{3^2\times3\times5}$ より，最小の自然数 n は，$n=2\times7\times3\times5$

6－2

$n=480$

解説

$120=2^3\times3\times5=2^2\times2\times3\times5$ より，条件を満たす n のうち k 番目のものを n_k とすると，
$n_1=2\times3\times5$，$n_2=2\times3\times5\times2^2$，$n_3=2\times3\times5\times3^2$，$n_4=2\times3\times5\times4^2=480$

第７講・平方根②　平方根の計算

例題 1

(1) $15\sqrt{2}$　(2) $\sqrt{2}$　(3) $\sqrt{6}$

(4) $6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$　(5) $37-12\sqrt{5}$　(6) -1

解説

(1) 与式$=3\sqrt{\dfrac{15\times20}{6}}=3\sqrt{50}=15\sqrt{2}$

(6) 与式$=(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{7})^2=27-28=-1$

例題 2

(1) $-3\sqrt{6}$　(2) $27-16\sqrt{2}$

(3) $-5\sqrt{5}$　(4) $-3-4\sqrt{5}$

解説

(4) 与式$=\dfrac{6\sqrt{5}}{3}-\dfrac{20\sqrt{5}-15}{5}-(1+2\sqrt{5}+5)=2\sqrt{5}-4\sqrt{5}+3-6-2\sqrt{5}=-3-4\sqrt{5}$

7−1

(1) $-9\sqrt{3}$　(2) $9+2\sqrt{5}$　(3) $17+7\sqrt{2}$

(4) $-\sqrt{3}$　(5) $5-2\sqrt{5}$　(6) $3+\sqrt{3}$

解説

(1) 与式$=3\sqrt{3}-\sqrt{3}-5\sqrt{3}-6\sqrt{3}=-9\sqrt{3}$

(2) 与式$=5+4\sqrt{5}+4-2\sqrt{5}=9+2\sqrt{5}$

(3) 与式$=2+8\sqrt{2}+15-\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=17+8\sqrt{2}-\sqrt{2}=17+7\sqrt{2}$

(4) 与式$=4\sqrt{3}+6-6-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

(5) 与式$=5-2\sqrt{5}+1-(5-4)=5-2\sqrt{5}$

(6) 与式$=\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}+2=3+\sqrt{3}$

第８講・平方根③ 式の値

例題 1

(1)　**35**　(2)　**10**

解説

(1)　$x+y=6$，$xy=9-8=1$ より，

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=6^2-1=\underline{35}$ ←普通に代入しても答えは出る。

(2)　$x+y=2\sqrt{3}$，$xy=1$ より，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2=10$

よって，与式 $=\dfrac{10}{1}=10$

例題 2

$\mathbf{0.3}$，$\mathbf{\dfrac{1}{3}}$，$\mathbf{\sqrt{0.3}}$

解説

すべて正の数なので２乗して比べる。$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$，$(\sqrt{0.3})^2=0.3$，$(0.3)^2=0.09$

$0.09<\dfrac{1}{9}<0.3$ より，$0.3<\dfrac{1}{3}<\sqrt{0.3}$

例題 3

-3

解説

$1<\sqrt{2}<2$より，$\sqrt{2}$の整数部分は１　よって，$a=\sqrt{2}-1$なので，

$a^2+2a-4=(a+1)^2-5=(\sqrt{2}-1+1)^2-5=-3$

8−1

(1)　$\mathbf{\dfrac{13}{4}}$　(2)　$\mathbf{12\sqrt{2}-6\sqrt{3}}$

解説

(1)　$x+y=\sqrt{3}$，$xy=\dfrac{1}{4}$を，$x^2+3xy+y^2=(x+y)^2+xy$ に代入。

(2)　$(2a-b)^2-(a-2b)^2=\{(2a-b)+(a-2b)\}\{(2a-b)-(a-2b)\}$

$=(3a-3b)(a+b)=3(a-b)(a+b)$

8-2

$\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

解説

すべて正の数なので2乗して比べる。

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$, $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{9}{5}$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right)^2=\dfrac{3}{25}$, $\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2=\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{9}{5}>\dfrac{3}{5}>\dfrac{9}{25}>\dfrac{3}{25}$ より，$\dfrac{3}{\sqrt{5}}>\sqrt{\dfrac{3}{5}}>\dfrac{3}{5}>\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

8-3

$13-4\sqrt{5}$

解説

$3.1<\sqrt{10}<3.2$，$1.4<\sqrt{2}<1.5$ より，$1<\sqrt{10}-\sqrt{2}<2$ よって，$x=1, y=\sqrt{10}-\sqrt{2}-1$ と表される。

$2x^2+2xy+y^2=x^2+(x^2+2xy+y^2)=x^2+(x+y)^2$

$=1+(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2=1+10-4\sqrt{5}+2=13-4\sqrt{5}$

第３章　二次方程式

第９講・二次方程式①　因数分解・平方完成で解く方法

要点整理

(1)　$\boldsymbol{x=-6,\ 5}$　　(2)　$\boldsymbol{x=7,\ -1}$

解説

(1)　左辺を因数分解して，$(x+6)(x-5)=0$

$x+6=0$ または $x-5=0$　　よって，$x=-6,\ 5$

A×B=0 のとき A=0 または B=0 を利用。

(2)　$(x-3)^2=16$　　$x-3=\pm4$　　$x=3\pm4$　　よって，$x=7,\ -1$

x-3 を１つのものと見る。

例題 1

(1)　$\boldsymbol{x=0,\ -4}$　　(2)　$\boldsymbol{x=-6,\ 10}$

(3)　$\boldsymbol{x=-\frac{3}{2}}$　　(4)　$\boldsymbol{x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}}$

(5)　$\boldsymbol{x=4,\ -6}$　　(6)　$\boldsymbol{x=\frac{11}{2},\ -\frac{3}{2}}$

解説

(3)　$(2x+3)^2=0$　　$x=-\frac{3}{2}$

(6)　$4(x-2)^2=49$　　$(x-2)^2=\frac{49}{4}$　　$x-2=\pm\frac{7}{2}$　　$x=2\pm\frac{7}{2}$ より，$x=\frac{11}{2},\ -\frac{3}{2}$

例題 2

(1)　$\boldsymbol{x=3\pm\sqrt{5}}$　　(2)　$\boldsymbol{x=-2\pm\sqrt{2}}$　　(3)　$\boldsymbol{x=4\pm\sqrt{7}}$

解説

(1)　$x^2-6x=-4$　　$x^2-6x+3^2=-4+3^2$　　$(x-3)^2=5$

$x-3=\pm\sqrt{5}$　　$x=3\pm\sqrt{5}$

(2)　$x^2+4x=-2$　　$x^2+4x+2^2=-2+2^2$　　$(x+2)^2=2$

$x+2=\pm\sqrt{2}$　　$x=-2\pm\sqrt{2}$

(3)　$x^2-8x=-9$　　$x^2-8x+4^2=-9+4^2$　　$(x-4)^2=7$

$x-4=\pm\sqrt{7}$　　$x=4\pm\sqrt{7}$

9−1

(1)　$\boldsymbol{x=-2,\ 3}$

(2)　$\boldsymbol{x=-3,\ 5}$

(3)　$\boldsymbol{x=0,\ 2}$

(4)　$\boldsymbol{x=\pm 2\sqrt{2}}$

解説

(2)　$3x^2-6x-45=0$　　両辺を 3 でわって，$x^2-2x-15=0$

$(x+3)(x-5)=0$　　$x=-3,\ 5$

第10講・二次方程式②　解の公式・方程式の解

例題 1

(1)　$x=5\pm\sqrt{21}$　　(2)　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$

解説

(1)　$x=\dfrac{10\pm\sqrt{10^2-4\times1\times4}}{2}=\dfrac{10\pm2\sqrt{21}}{2}=5\pm\sqrt{21}$

(2)　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-2)}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$

例題 2

(1)　7　　(2)　$x=-3,\ 1$

解説

(1)　$x=1$ を代入して，$a^2+4a+4=0$　　$(a+2)^2=0$　　$a=-2$

よって，$x^2-8x+7=0$　　$(x-1)(x-7)=0$　　もう１つの解は，7

(2)　$x=1,\ 2$ をそれぞれ代入して，

$1+a+b=0$…①,

$4+2a+b=0$…②

①，②を連立方程式として解いて，$a=-3,\ b=2$

よって，$x^2+2x-3=0$　　$(x+3)(x-1)=0$　　$x=-3,\ 1$

10－1

(1)　$a=-14,\ b=40$　　(2)　$a=5+3\sqrt{2},\ a^2b-ab^2=42\sqrt{2}$　　(3)　$a=0,\ 4$

解説

(2)　$x^2-10x+7=0$ を解いて，$x=5\pm3\sqrt{2}$ より，$a=5+3\sqrt{2},\ b=5-3\sqrt{2}$

また，$a-b=6\sqrt{2},\ ab=25-18=7$ だから，$a^2b-ab^2=ab(a-b)=42\sqrt{2}$

(3)　ただ１つの解を $x=p$ とすると，$x^2+ax+a=(x-p)^2$ すなわち，

$x^2+ax+a=x^2-2px+p^2$ が成り立つ。両辺を比較して，

$a=-2p$…①，$a=p^2$…②

①を②に代入して，$-2p=p^2$ より，$p(p+2)=0$　$p=0,\ -2$

$p=0$ のとき $a=0$，$p=-2$ のとき $a=4$

第11講・二次方程式③ 数に関する問題

例題 1

(1)　**7**　　(2)　**正の数　5，負の数　−2**

解説

(1)　もとの数を x とすると，$x^2=3x+28$，$(x+4)(x-7)=0$，$x=-4$，7

$x>0$ より，$x=7$

(2)　正の数を x，負の数を $(x-7)$ とすると，$(x-7)^2=2x-6$

$0<x<7$ より，$x=5$

例題 2

10

解説

$(x+4)^2=2x^2-4$，これを解くと，$x=10$，-2

x は正の数だから，$x=10$

例題 3

(1)　**8，9**　　(2)　**7，9，11**

解説

(1)　連続する 2 数を x，$x+1$ とすると，$x^2+(x+1)^2=145$

$x>0$ だから，$x=8$

(2)　まん中の数を x とすると，$(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=4(x-2)(x+2)-57$

$x>0$ だから，$x=9$

11−1

6 と 9

解説

小さい方の自然数を x とすると，大きい方の数は $x+3$

よって，$x(x+3)=54$　　$x>0$ だから，$x=6$

11－2

$a=3$

解説

$(a+2)^2+3=2(a+2)+3+15$

$a>0$ だから，$a=3$

11－3

99 と 101

解説

連続する 2 つの正の奇数を $2n-1$，$2n+1$（n は自然数）とすると，

$(2n-1)(2n+1)=9999$　$n^2=2500$

$n>0$より，$n=50$

第12講・二次方程式④ 図形に関する問題

例題 1

(1)　**9cm**　　(2)　$\boldsymbol{x=3}$

解説

(1)　縦の長さを $x$cm とすると，$x(24-x)=135$　　$0<x<12$ だから，$x=9$

(2)　4つの辺にそって $x$cm の幅で切り落としたら，縦 $(18-2x)$cm，横 $(21-2x)$cm の長方形になるから，$(18-2x)(21-2x)=180$

これを整理して，$2x^2-39x+99=0$　　$(2x-33)(x-3)=0$　　$x=3,\ \dfrac{33}{2}$

$\underline{0<x<9}$ より，$x=3$

↑ 変域に注意する。

例題 2

16cm

解説

もとの長方形の縦の長さを $x$cm とすると，横は $x+4$(cm) と表せる。よって，直方体の底面の縦は $x-8$(cm)，横は $x+4-8=x-4$(cm)

また，高さは 4cm であるから，$(x-8)(x-4)\times4=384$

これを解くと，$x=-4,\ 16$　　$x>8$ より，$x=16$

例題 3

4m

解説

道幅を xm とすると，$(24-x)(25-x)=24\times25\times0.7$

これを解くと，$x=4,\ 45$

$0<x<24$ より，$x=4$　　よって，道幅は 4m

12−1

261 個

解説

C の縦のタイルの個数を x 個とすると，

$(x+4)(x+16)=325$　　$(x+29)(x-9)=0$　　$x>0$ より，$x=9$

C の個数は $9\times21=189$(個)，A の個数は $(13+25)\times2-4=72$(個)

$189+72=261$(個)

12−2

14cm

解説

はじめの厚紙の縦の長さを $2x$cm とすると，横の長さは $3x$cm となるので，

$3(2x-6)(3x-6)=360$

これを解くと，$x=-2,\ 7$　　$x>3$ より，$x=7$

よって，縦の長さは 14cm

12−3

2m

解説

花だん部分をひとつの長方形として考える。

$(8-x)(12-2x)=8\times12\div2$　　$0<x<6$ より，$x=2$

第13講・二次方程式⑤ 点の移動に関する問題

例題 1

2cm と 6cm

解説

点 P が A から $x$cm 動いたとき，△PBQ の面積が 6cm^2 になったとすると，

BQ$=x$cm，PB$=8-x$(cm)で，△PBQ$=\frac{1}{2}\times$BQ$\times$PB だから，$\frac{1}{2}x(8-x)=6$

これを解くと，$x=2$，6　　これらは $0<x<8$ を満たす。

例題 2

(1)　$(-x^2+9x)$cm^2　　(2)　$x=2,\ \frac{11}{3}$

解説

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ のときで，

$$\triangle\text{CPQ}=6^2-\frac{1}{2}\times x\times 2x-\frac{1}{2}\times 6(6-x)-\frac{1}{2}\times 6(6-2x)=-x^2+9x(\text{cm}^2)$$

(2)　$0\leqq x\leqq 3$ のとき，$-x^2+9x=14$ より，$x=2$，7　　$0\leqq x\leqq 3$ より，$x=2$

$3\leqq x\leqq 6$ のとき，△CPQ$=\frac{1}{2}(12-2x)\times 6=-6x+36$(cm^2)

$-6x+36=14$ より，$x=\frac{11}{3}$　　これは $3\leqq x\leqq 6$ を満たす。

13－1

4cm と 6cm

解説

AP$=x$cm とすると，QD$=2x$cm だから，AQ$=20-2x$(cm)と表せる。

よって，$\frac{1}{2}x(20-2x)=24$　　これを解くと，$x=4$，6　　よって，4cm と 6cm

13－2

2 秒後

解説

△CPQ＝ 長方形ABCD－(△APQ＋△BCP＋△DQC)だから，

$4\times 6-\left\{\frac{1}{2}\times x\times 2x+\frac{1}{2}\times(4-x)\times 6+\frac{1}{2}\times(6-2x)\times 4\right\}=10$　　これを解くと，$x=2$，5

$0<x\leqq 3$ より，$x=2$　　よって，2 秒後

第１４講・二次方程式⑥ 割合に関する問題

例題 1

$x=20$

解説

定価は，$500\left(1+\frac{x}{100}\right)$円，売り値は，$500\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)$円

（売り値）－（原価）＝（利益）だから，$500\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)-500=-20$

これを解いて，$x=\pm20$　　$x>0$ より，$x=20$

例題 2

(1)　4.5%　　(2)　20%

解説

(1)　乗車賃が x 円のときの乗客数を y 人とすると，

$x\times\left(1+\frac{10}{100}\right)\times y\times\left(1-\frac{5}{100}\right)=1.045xy$

(2)　a%値上げしたとすると，$x\left(1+\frac{a}{100}\right)\times y\left(1-\frac{a}{200}\right)=1.08xy$

$a^2-100a+1600=0$　　$(a-20)(a-80)=0$　　$0<a<50$ より，$a=20$

例題 3

(1)　225%　　(2)　$a=50$

解説

(1)　一昨年の売上金を x 円とすると，A 商店の今年の売上金は，

$x\times\left(1+\frac{25}{100}\right)\times\left(1+\frac{80}{100}\right)=2.25x$(円)

(2)　今年の売上金が等しいので，$2.25x=x\times\left(1+\frac{a}{100}\right)^2$　　$\left(\frac{a}{100}+1\right)^2=2.25$,

両辺 x でわって，x は消える。

$\frac{a}{100}+1=\pm1.5$

$a>0$ より，$a=50$

14－1

$x=40$

解説

もとの円の半径を r とすると，$\pi\left\{r\left(1+\frac{x}{100}\right)\right\}^2=\pi r^2\times\left(1+\frac{96}{100}\right)$

$\left(1+\frac{x}{100}\right)^2=\frac{196}{100}$　　$1+\frac{x}{100}=\pm\frac{14}{10}$　　$x>0$より，$x=40$

14－2

(1)　**$(150+6x)$杯**　　(2)　**180円**

解説

(1)　値段を10円下げるごとにコーヒーは6杯ずつ増えるから，$10x$円値下げすれば，コーヒーは$6x$杯増える。

(2)　コーヒー1杯の値段を300円から$10x$円下げたとすると，

$(300-10x)(150+6x)=39960$　　$x^2-5x-84=0$　　$(x+7)(x-12)=0$

$x>0$より，$x=12$

第１５講・二次方程式⑦ いろいろな二次方程式の文章題

例題 1

(1)　**6cm**　　(2)　**4cm**

解説

(1)　もとの正方形の１辺を $x$cm とすると，$2x(x+1)=x^2+48$

これを解くと，$x=-8$，6　　$x>0$ より，$x=6$

よって，もとの正方形の１辺の長さは 6cm

(2)　縦の長さを $x$cm とすると，$8x(x+2)=192$　　これを解くと，$x=-6$，4

$x>0$ より，$x=4$　よって，縦の長さは 4cm

例題 2

$t=3$

解説

直線 AB の式は $y=x+5$，点 Q は直線 AB 上にあるから，Q$(t,\ t+5)$

△AQP の面積が２だから，

$\frac{1}{2}\times\{(t+5)-2t\}\times(5-t)=2$，$(5-t)^2=4$，$(t-5)^2=4$，$t=3$，$7$

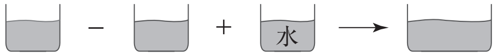
$0<t<5$ より，$t=3$

例題 3

(1) $\dfrac{2}{5}x\ell$　　(2) $\dfrac{1}{5}x\left(4-\dfrac{2}{5}x\right)\ell$　　(3) $x=2$

解説

濃度，ジュースの量，果汁の量に注目して表をつくると，

〔1回目〕 

(濃度)	40%		40%		／		
(ジュース)	10ℓ	−	$x\ell$	+	$x\ell$	=	10ℓ
(果汁)	4ℓ	−	$\dfrac{2}{5}x\ell$		／	=	$\left(4-\dfrac{2}{5}x\right)\ell$

〔2回目〕

(濃度)	$\dfrac{1}{10}\left(4-\dfrac{2}{5}x\right)$		$\dfrac{1}{10}\left(4-\dfrac{2}{5}x\right)$		／		16%
(ジュース)	10ℓ	−	$2x\ell$	+	$3x\ell$	=	$(10+x)\ell$
(果汁)	$\left(4-\dfrac{2}{5}x\right)\ell$	−	$\dfrac{1}{5}x\left(4-\dfrac{2}{5}x\right)\ell$		／	=	$\dfrac{16}{100}(10+x)\ell$

(3) $\left(4-\dfrac{2}{5}x\right)-\dfrac{1}{5}x\left(4-\dfrac{2}{5}x\right)=\dfrac{16}{100}(10+x)$　$x^2-17x+30=0$

$(x-2)(x-15)=0$　$0<x<5$ より，$x=2$

15-1

(1) $S=16-\dfrac{1}{2}(4-t)^2$　　(2) $S=4(8-t)$　　(3) $t=2,\ \dfrac{9}{2}$

解説

(1) $0\leqq t<4$ において，重なった部分の面積は正方形の面積から左上の直角二等辺三角形の面積を引いたものになる。

(2) $4\leqq t<8$ において，重なった部分の面積はたて 4cm，横$(8-t)$の長方形の面積となる。

(3) (1)(2)で求めた S がそれぞれ 14 となる t を求める。

第４章　二乗に比例する関数

第１６講・二乗に比例する関数①
関数 $y=ax^2$ のグラフと変域

例題 1

(1)　$y=\frac{1}{125}x^2$　　(2)　45m　　(3)　時速 100km

解説

(1)　$y=ax^2$ とすると，$x=50$ のとき，$y=20$ だから，$20=2500a$　　$a=\frac{1}{125}$

よって，$y=\frac{1}{125}x^2$

(2)　(1)の式に $x=75$ を代入して，$y=\frac{1}{125}\times 75^2=45$

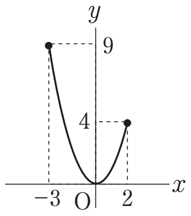
(3)　(1)の式に $y=80$ を代入して，$80=\frac{1}{125}x^2$　　$x^2=10000$　　$x>0$ より，$x=100$

例題 2

(1)　$0\leqq y\leqq 9$　　(2)　$a=\frac{2}{3}$

解説

(1)　右のグラフより，y の変域は $0\leqq y\leqq 9$



(2)　$x=3$ のとき $y=6$ になるから，$6=9a$　　$a=\frac{2}{3}$

例題 3

$a=8$，$b=\frac{3}{2}$，$c=4$

解説

$y=4x+a$ のグラフは右上がりの直線だから点$(-2,\ 0)$を通る。よって，$a=8$

$y=4x+8$ のグラフは点$(c,\ 24)$を通ることから，$c=4$

点$(4,\ 24)$は $y=bx^2$ のグラフ上の点になることから，$b=\frac{3}{2}$

16－1

(1)　$\boldsymbol{y=5x^2}$　　(2)　**8秒**

解説

(1)　$y=ax^2$ とすると，$x=4$ のとき $y=80$ だから，$80=16a$　　$a=5$

(2)　$y=5x^2$ に $y=320$ を代入して，$x^2=64$　　$x>0$ より，$x=8$

16－2

(1)　$\boldsymbol{-9 \leqq y \leqq 0}$　　(2)　$\boldsymbol{a=3}$

解説

(1)　右の図1のようなグラフをかいて考える。

(2)　右の図2のようなグラフをかいて考える。
$y=ax^2$ のグラフは，点$(-2,\ 12)$を通る。

図1

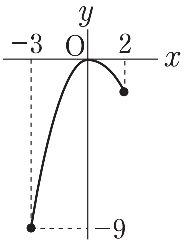
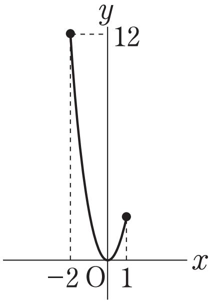


図2



第17講・二乗に比例する関数②　関数 $y=ax^2$ の変化の割合

例題 1

(1)　**−6**　(2)　$\boldsymbol{a=-2}$　(3)　$\boldsymbol{p=-1}$

解説

(1)　関数 $y=ax^2$ で，x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は，$\underline{a(p+q)}$

これを利用して，$-2\times(-1+4)=-6$

変化の割合の公式として覚えておくとよい。

(2)　$a(-3+1)=4$ より，$a=-2$

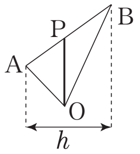
(3)　$2(p+p+3)=2$

例題 2

(1)　$\boldsymbol{a=1}$　(2)　**15**　(3)　**10**

解説

(1)　$y=ax^2$ で，x の値が -2 から 3 まで増加するときの変化の割合が，直線 AB の傾きの 1 に等しくなるから，$a(-2+3)=1$　　$a=1$



(2)　A$(-2,\ 4)$，B$(3,\ 9)$から，直線 AB の式は，$y=x+6$

直線 AB と y 軸との交点を P とすると，P$(0,\ 6)$

右図より，$\triangle\text{OAB}=\dfrac{1}{2}\times\text{OP}\times\{3-(-2)\}=\dfrac{1}{2}\times6\times5=15$

$\triangle\text{AOB}=\dfrac{1}{2}\times\text{OP}\times h$

三角形の面積公式として覚えておくとよい。

(3)　OB∥AC のとき△AOB＝△COB となる。

A$(-2,\ 4)$を通り，直線 OB(傾き 3)に平行な直線の式は，$y=3x+10$

17−1

(1)　$\boldsymbol{a=-\dfrac{7}{3}}$　(2)　$\boldsymbol{t=-\dfrac{1}{2}}$

解説

(1)　$a\times(1+5)=-14$ より，$a=-\dfrac{7}{3}$

(2)　$\dfrac{1}{3}(t+t+3)=\dfrac{2}{3}$ より，$t=-\dfrac{1}{2}$

17−2

⑴　$y=-4x+16$　　⑵　48

解説

⑴　A$(-4,\ 32)$，B$(2,\ 8)$の２点を通る直線の式を求める。

⑵　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times16\times\{2-(-4)\}=48$

第18講・二乗に比例する関数③ 文字をつかって座標を表す

例題 1

(1) **24**　(2) **$(-2t,\ 2t^2)$**　(3) **$t=2$**

解説

(1) Q，R の x 座標はともに 4，$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ にそれぞれ $x=4$ を代入して，

Q(4，8)，R(4，32)　$32-8=24$

(2) R$(t,\ 2t^2)$より，T の y 座標は $2t^2$　$y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して，$x^2=4t^2$

$x<0$ より，$x=-2t$

(3) Q$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$，R$(t,\ 2t^2)$，T$(-2t,\ 2t^2)$より，$\underbrace{2t^2-\frac{1}{2}t^2}_{\text{QR}}=\underbrace{t-(-2t)}_{\text{RT}}$　$t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$　$t>0$ より，$t=2$

例題 2

(1) **y の増加量　4，変化の割合　2**　(2) **$a=-\frac{3}{2}$**　(3) **$\ell=2t^2$**　(4) **$t=1$**

解説

(2) P$(p,\ 0)$とすると，Q$\left(p,\ \frac{1}{2}p^2\right)$，R$(p,\ ap^2)$

PR＝3PQ より，$-ap^2=3\times\frac{1}{2}p^2$　$a=-\frac{3}{2}$

(3) P$(t,\ 0)$のとき，Q$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$，R$\left(t,\ -\frac{3}{2}t^2\right)$より，$\ell=\frac{1}{2}t^2-\left(-\frac{3}{2}t^2\right)$

(4) SQ＝2OP＝$2t$，QR＝$2t^2$

正方形になるのは，SQ＝QR のときだから，$2t=2t^2$

$t(t-1)=0$　$t>0$ より，$t=1$

18－1

(1) **AB＝$2t$，AD＝$\frac{3}{2}t^2$**　(2) **$\left(\frac{4}{3},\ \frac{16}{9}\right)$**

解説

(1) A$(t,\ t^2)$，B$(-t,\ t^2)$，D$\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2\right)$より，

AB＝$t-(-t)=2t$，AD＝$t^2-\left(-\frac{1}{2}t^2\right)=\frac{3}{2}t^2$

(2) AB＝ADのとき正方形になるから，$2t=\frac{3}{2}t^2$　$3t^2-4t=0$　$t(3t-4)=0$

$t>0$より，$t=\frac{4}{3}$

第19講・二乗に比例する関数④ 面積に関する問題

例題 1

(1) $a=\frac{1}{2}$　(2) $y=\frac{3}{5}x+\frac{16}{5}$　(3) $(-2,\ 8)$

解説

2点 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$ の中点の座標は $\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right)$

(1) $y=ax^2$ に, $x=-2$, $y=2$ を代入して, $a=\frac{1}{2}$

(2) B(2, 2), C(4, 8) で, 求める直線は線分 BC の中点(3, 5) を通る。

(3) 四角形 ABCD は台形で, その面積は, $\frac{1}{2}\times(8+4)\times6=36$　求める点を E$(t,\ 8)$ とすると, $\triangle BCE=36\times\frac{1}{2}=18$ だから, $\frac{1}{2}(4-t)\times6=18$, $t=-2$

例題 2

(1) $(3,\ 12)$　(2) $a=-\frac{4}{9}$　(3) $t=2$

解説

(1) A は $y=2x+6$ と x 軸の交点だから, A$(-3,\ 0)$
よって, x 座標は 3

(2) C$(-3,\ 9a)$, D$(3,\ 9a)$　BD=4AC より, $12-9a=4\times(-9a)$　$a=-\frac{4}{9}$

(3) C$(-3,\ -4)$, D$(3,\ -4)$, P$\left(t,\ -\frac{4}{9}t^2\right)$ より,
$\triangle PCD=\frac{1}{2}\times6\left\{-\frac{4}{9}t^2-(-4)\right\}$, $\triangle PAC=\frac{1}{2}\times4\{t-(-3)\}$
$\frac{1}{2}\times6\left(-\frac{4}{9}t^2+4\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times4(t+3)$　これを解いて $t=2,\ -3$
$t\neq-3$ だから, $t=2$

19-1

(1) $y=-\frac{2}{3}x+8$　(2) $-3\sqrt{3}$

解説

(2) ℓ と BP との交点を Q とする。△APQ と△AQB で, 底辺をともに線分 AQ とみなせば, △APQ=△AQB より高さが等しい。△AQB の高さが 3 とわかるので, △APQ の高さも 3　よって, P の y 座標は 9 になる。$y=\frac{1}{3}x^2$ に $y=9$ を代入して, $x^2=27$　$x<0$ より, $x=-3\sqrt{3}$

第20講・二乗に比例する関数⑤ 放物線と直線

例題 1

(1)　**$P_1(1,\ 1)$　$P_2(-2,\ 4)$　$P_3(3,\ 9)$**　　(2)　**$(-3,\ 3)$**

解説

(1)　P_1 の x 座標を s とすると，$y=x^2$ で，x の値が 0 から s まで増加するときの変化の割合が，OP_1 の傾きの 1 に等しいから，$1\times(0+s)=1$　$s=1$　$P_1(1,\ 1)$となる。
以下，同様にして，P_2 の x 座標を t とすると，$1\times(t+1)=-1$　$t=-2$　$P_2(-2,\ 4)$
P_3 の x 座標を u とすると，$1\times(-2+u)=1$　　$u=3$　　$P_3(3,\ 9)$

例題 2

$a=\frac{1}{6}$

解説

$A(-2,\ 4a)$，$B(3,\ 9a)$で，点$(0,\ 1)$は AB 上にあるから，$\dfrac{9a-4a}{3-(-2)}=\dfrac{9a-1}{3-0}$が成り立つ。これを解いて，$a=\frac{1}{6}$

例題 3

(1)　**$a=2$**　　(2)　**$(-1,\ 2)$**　　(3)　**-2**

解説

(2)　B の x 座標を b とすると，$2(b+2)=2$ より，$b=-1$

(3)　$-(p+q)=2$ より，$p+q=-2$

20－1

(1)　**$a=\frac{1}{2}$**　　(2)　**$k=\frac{1}{2}$**　　(3)　**$k=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$**

解説

(2)　D の x 座標を d とすると，$\frac{1}{2}(-2+d)=\frac{1}{2}$より，$d=3$
③のグラフと y 軸との交点を P とすると，$P(0,\ k)$
$AD/\!/BC$ より，$\triangle ACD=\triangle APD$ だから，$\frac{1}{2}(3-k)\{3-(-2)\}=\frac{25}{4}$　　$k=\frac{1}{2}$

(3)　$E(-2k,\ 0)$　　$AD/\!/EC$，$AD=EC$より，Eから右へ5，上へ$\frac{5}{2}$進めばCに至るから，$C\left(-2k+5,\ \frac{5}{2}\right)$　　これを $y=\frac{1}{2}x^2$に代入。

第21講・二乗に比例する関数⑥ 放物線と面積

例題 1

(1)　3　　(2)　$y=x+6$　　(3)　27　　(4)　$k=12-3\sqrt{6}$

解説

(4)　$k>3$ として，$y=k$ と AB，OB との交点をそれぞれ C，D とすると，

$C(k-6,\ k)$，$D\left(\frac{k}{2},\ k\right)$ より，$CD=\frac{k}{2}-(k-6)=\frac{1}{2}(12-k)$

よって，$\triangle BCD=\frac{1}{4}(12-k)^2$

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\triangle OAB=\frac{27}{2}$ より，$\frac{1}{4}(12-k)^2=\frac{27}{2}$　$(12-k)^2=54$　$12-k=\pm3\sqrt{6}$

$k<12$ より，$k=12-3\sqrt{6}$

例題 2

(1)　$A(-1,\ 1)$，$B(3,\ 9)$　　(2)　4

解説

(1)　$y=x^2$ と $y=2x+3$ を連立方程式として解く。

(放物線と直線の交点の座標は連立の解である。)

$x^2=2x+3$ より，$x^2-2x-3=0$　　$(x+1)(x-3)=0$　　$x=-1,\ 3$

(2)　直線 AB と x 軸との交点を C とすると，$C\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$

ここで，$P(t,\ 0)$ とすると，$\triangle APB=\triangle BCP-\triangle ACP$ より，

$\frac{1}{2}\times\left\{t-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times9-\frac{1}{2}\times\left\{t-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times1=22$　　これを解いて，$t=4$

(CP の長さ)

例題 3

(1)　$a=\frac{5}{2}$　　(2)　6　　(3)　$m=\frac{7}{2}$

解説

(3)　四角形 OBDA $=\triangle OAB+\triangle ABD=4+32=36$

$y=mx$ と AD との交点を E とすると，$\triangle OAE=18$

ここで，E の x 座標を t とすると，

$\frac{1}{2}\times6(t+2)=18$　　$t=4$　　$E(4,\ 14)$

21－1

⑴　**A（-2，4），B（3，9）**　　⑵　**（1，1），（4，16）**

解説

⑴　$y=x^2$ と $y=x+6$ を連立方程式として解く。

$x^2=x+6$ より，$x^2-x-6=0$　$(x+2)(x-3)=0$　$x=-2$，3

⑵　線分 AB を底辺として，△OAB と高さが等しくなる三角形を考える。1 つは，原点を通り直線 $y=x+6$ に平行な直線 $y=x$ が放物線と交わる点で，$x^2=x$ より，$x=0$，1

もう 1 つは，点$(-3,\ 9)$を通り直線 $y=x+6$ に平行な直線 $y=x+12$ が放物線と交わる点で，$x^2=x+12$ より，$x^2-x+12=0$　$(x+3)(x-4)=0$　　$x=-3$，4

第５章　円周角の定理

第22講・円周角の定理①　中心角と弧・円周角

例題 1

(1)　**65°**　　(2)　**25°**　　(3)　**62°**

解説

(1)　$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$に対する円周角から，$\angle \mathrm{DBC}=\angle \mathrm{DAC}=25°$

よって，$\angle x=\underline{90°}-25°=65°$
（90°：三角形の外角。）

(2)　$(\angle x+35°)\times 2=120°$ より，$\angle x=25°$

(3)　$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$に対する円周角から，$\angle \mathrm{BDC}=\angle \mathrm{BAC}=28°$

よって，$\angle x=\underline{90°}-28°=62°$
（90°：直径BDに対する円周角。）

例題 2

(1)　**62°**　　(2)　**$\angle x=240°$，$\angle y=20°$**

解説

(1)　$\angle \mathrm{ECA}=35°$　　$\angle \mathrm{CED}=\angle \mathrm{CBD}=27°$ より，$\angle \mathrm{AFE}=\angle \mathrm{ECA}+\angle \mathrm{CED}=62°$

22－1

(1)　**130°**　　(2)　**68°**　　(3)　**$\angle x=55°$**　　(4)　**62°**

解説

(1)　$\angle \mathrm{AOC}=50°\times 2=100°$　　$\angle \mathrm{ABC}=(360°-100°)\times \dfrac{1}{2}=130°$

(2)　$\angle \mathrm{AOB}=2x$とすると，$\angle \mathrm{ACB}=x$　　$2x+20°=x+54°$

(3)　$\angle \mathrm{BOC}=70°$，$\angle \mathrm{AOB}=110°$ より，$\angle x=110°\times \dfrac{1}{2}=55°$

(4)　$\angle \mathrm{AOB}=62°\times 2=124°$

四角形PAOBはブーメラン型の図形なので，

$\angle \mathrm{PAO}+\angle \mathrm{PBO}=124°-62°=62°$

22−2

(1)　**$\angle BCE=\frac{2}{3}a$**

$\angle CAD=\left(72^\circ-\frac{2}{3}a\right)$ または，$\angle CAD=(108^\circ-2a)$

(2)　**27°**

解説

(1)　EF // BCより，∠BCE＝∠CEF　　$\overset{\frown}{FC}$に対する円周角より，

$\angle CEF=\angle FBC=\frac{2}{3}a$

よって，$\angle BCE=\frac{2}{3}a$

$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角より，∠CAD＝∠CED

DE // CAより，∠CED＝∠ACE

よって，$\angle CAD=\angle ACE=\angle ACB-\angle BCE=72^\circ-\frac{2}{3}a$

なお，∠CADに関しては，$72^\circ+2a+\angle CAD=180^\circ$より，

$\angle CAD=108^\circ-2a$としてもよい。

第23講・円周角の定理②　円周角の応用問題

例題 1

108°

解説

点 A と B を結ぶと，$\angle ABE = 360° \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \underline{36°}$（全円周の$\frac{1}{5}$に対する円周角。）

$\angle BAD = 360° \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = 72°$

よって，$\underline{\angle BFD} = \angle ABE + \angle BAD = 36° + 72° = 108°$（△ABF の外角。）

例題 2

(1)　**67.5°**　　(2)　**5：8**

解説

(2)　∠OBP＝∠OCP＝90°だから，四角形の内角の和より，

$\angle BOC = 360° - (90° \times 2 + 70°) = 110°$

$\angle BOD = 360° - (110° + 120°) = 130°$

∠ACD＝∠OCA＋∠OCD＝40°より，

∠AOD＝80°なので，$\angle AOB = 130° - 80° = 50°$

よって，$\overset{\frown}{BA} : \overset{\frown}{AD} = 5 : 8$

例題 3

28°

解説

点AとB，点AとEを結ぶと，

∠BAC＝∠BEF＝33°　　∠DAE＝∠DBE＝29°

BEは直径だから，∠BAE＝90°

よって，$\angle CAD = 90° - (33° + 29°) = 28°$

23－1

(1)　**100°**　　(2)　**5：7**

解説

(2)　弧と円周角は比例関係にある。

$\angle DAB = 60° - 25° = 35°$，点CとDを結ぶと，$\angle ACD = 60° - 35° = 25°$

$\overset{\frown}{AD} : \overset{\frown}{DB} = 25 : 35 = 5 : 7$

第24講・円周角の定理③ 円周角の定理の証明問題

例題 1

(1)　二等辺三角形の底角は等しい。

(2)　証明の続き 同様に∠BOK は△OPB の外角だから，

∠BOK＝∠OPB＋∠OBP＝2∠b

したがって，

∠AOB＝∠AOK－∠BOK＝2∠a－2∠b＝2(∠a－∠b)

また，∠APB＝∠OPA－∠OPB＝∠a－∠b

よって，∠APB＝$\frac{1}{2}$∠AOB

例題 2

証明 AD，BC をひくと，OA＝OD より，∠DAB＝∠ODA

AC∥OD より，∠ODA＝∠DAC

よって，∠DAB＝∠DAC…①

同じ弧に対する円周角は等しいから，

∠DAB＝∠DCB…②　∠DAC＝∠DBC…③

①，②，③より，∠DCB＝∠DBC

よって，△DCB は二等辺三角形となり，BD＝CD

例題 3

証明 AB＝AC より，∠ABC＝∠ACB…①

$\overset{\frown}{AC}$に対する円周角から，∠ABC＝∠AEC…②

$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角より，∠ACB＝∠ADB…③

AE∥BD…④より，∠AEC＝∠EFB…⑤

①，②，③，⑤より，∠EFB＝∠ADB

同位角が等しいから，AD∥EF…⑥

④，⑥より，2組の対辺がそれぞれ平行になり，四角形 AEFD は平行四辺形である。

24－1

証明 △ABDと△ACFにおいて，
仮定より，AB＝AC…①
直径に対する円周角より，∠BAC＝90°
よって，∠BAD＝∠CAF＝90°…②
$\overset{\frown}{AE}$に対する円周角より，∠ABD＝∠ACF…③
①，②，③より，１辺とその両端の角がそれぞれ等しいから，
△ABD≡△ACF
よって，BD＝CF

解説

同じ弧に対する円周角は等しいことと，直径に対する円周角は90°であることを利用する。

第６章　相似

第25講・相似①　長さを求める問題

例題 1

△ABFと△FCEにおいて，∠ABF＝∠FCE ＝ 90°…①

∠BAF＋∠BFA＝90°，∠EFC＋∠BFA＝90°より，∠BAF＝∠EFC…②

（どちらの角も，∠BFAとの和が90°になる。）

①，②より，２組の角がそれぞれ等しいから，

△ABF ∽△ FCE

よって，AB：FC＝FA：EFより，6：2＝10：EF，EF＝$\frac{10}{3}$(cm)

解説

直角をはさむ両側に相似な三角形ができている。

（関数とグラフにもよく出てくる。）

例題 2

(1) $\frac{14}{3}$cm　　(2)① △DBA，△CBE　　② 8cm

解説

(1) △ABC ∽△ADB（相似比 4：3）より，BC＝4x，DB＝DC＝3x，とすると，

6：(8－3x)＝4：3　　$x=\frac{7}{6}$　　BC＝$\frac{14}{3}$(cm)

(2)② △DCE∽△ CBEより，CE：16＝4：CE　　$CE^2=64$

25－1

(1) $\frac{16}{3}$　　(2) 6cm

解説

(1) △ABE∽△BECより，9：6＝8：BC　　BC＝AD＝$\frac{16}{3}$

(2) △ABC∽△ACD（2組の角がそれぞれ等しい）より，BD＝$x$cmとすると，

8：4＝4：(8－x)より，x＝6(cm)

25－2

(1)　**∠CAE…$\frac{1}{2}a$，CF…6cm**　　(2)　**3：8**　　(3)　**$\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm**

解説

(1)　∠CAE＝∠CBE ＝$\frac{1}{2}a$

また，∠CFA＋∠CAE＝∠ACB より，∠CFA＝$\frac{1}{2}a$

よって，△ACF は AC＝FC＝6(cm)の二等辺三角形である。

(2)　△ACE ∽△FBE(相似比 3：5)より，AE：FE＝3：5

よって，AE：AF＝3：8

(3)　CE＝AE＝$3x$(cm)とおくと，EF＝$5x$(cm)

△ACF∽△BEF より，AF：BF＝CF：EF

$8x$：10＝6：$5x$ より，$x^2=\frac{3}{2}$

$x>0$ より，$x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

よって，CE＝$3x=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ (cm)

第26講・相似②　相似の証明問題

例題 1

証明 △ABD と△CFD において，∠BDA＝∠FDC＝90°…①
四角形 BDFE で①から，∠ABD＋∠DFE＝180°
また，∠CFD＋∠DFE＝180°
よって，∠ABD＝∠CFD…②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△ABD∽△CFD

例題 2

(1) $2x$　(2) 2　(3) 5：3　(4) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

解説

(2) CD＝CA＝3，AD＝BD＝5－3＝2
(3) △ADC で AE は∠DAC の二等分線だから，
DE：EC＝AD：AC＝2：3 より，DE＝$3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$
また，△ABE で AD は∠BAE の二等分線だから，
AB：AE＝BD：DE＝2：$\frac{6}{5}$＝5：3
(4) △ABE∽△DAE より，AB：DA＝BE：AE
AE＝$\frac{3}{5}$AB より，AB：2＝$\frac{16}{5}$：$\frac{3}{5}$AB　$\frac{3}{5}\mathrm{AB}^2=\frac{32}{5}$
AB＞0 より，AB＝$\frac{4\sqrt{6}}{3}$

26－1

㋐ ∠AEB　㋑ ∠AFC　㋒ ∠CAF　㋓ ∽　㋔ BE　㋕ CF
㋖ ∠CDF　㋗ ∠BED　㋘ ∠CFD　㋙ ∽　㋚ BE　㋛ CF
㋜ AB　㋝ AC

第27講・相似③ 平行線と線分比

例題 1

(1) $\boldsymbol{x=10}$　(2) $\boldsymbol{x=14}$　(3) $\boldsymbol{x=10}$

解説

(1) $BC \parallel DE$ より，$AE:AC=DE:BC$ となるから，$5:7=x:14$，$7x=70$，$x=10$

(2) $\ell \parallel m \parallel n$ より，$7:3=x:6$，$3x=42$，$x=14$

(3) $DE \parallel BF$ より，$AD:DB=AE:EF=3:2$

$DF \parallel BC$ より，$AF:FC=AD:DB=3:2$ となるから，$15:x=3:2$，$x=10$

例題 2

(1) $\boldsymbol{y=\dfrac{24}{x}}$　(2) **4cm**

解説

(1) $AD \parallel CE$ より，$4:(y-4)=x:(6-x)$ となり，$y=\dfrac{24}{x}$

27－1

(1) $\boldsymbol{x=8}$　(2) $\boldsymbol{x=6}$　(3) $\boldsymbol{x=12}$

解説

(1) AC と EF の交点を G とすると，$x=EG+FG=4+4=8$

(2) $BE:ED=2:3$　$x:15=2:5$ より，$x=6$

(3) $CF:CB=3:4$　$3:x=1:4$ より，$x=12$

27－2

(1) $\frac{7}{3}$ cm　　(2) $\frac{5}{12}$ 倍

解説

(1) ED∥BC より，ED：7＝2：8　　ED＝$\frac{7}{4}$（cm）

ED∥FA より，$\frac{7}{4}$：AF＝6：8　　AF＝$\frac{7}{3}$（cm）

(2) ED∥BC より，EG：CG＝ED：CB＝1：4

△DGC＝4 とすると，△EDC＝5

AD：DC＝1：3 より，△AED＝△EDC ×$\frac{1}{3}$ ＝ $\frac{5}{3}$

以上より，△AED＝$\frac{5}{12}$△DGC

第28講・相似④ 中点連結定理

例題 1

証明　△ABC において，
E，F はそれぞれ辺 AB，AC の中点であるから，EF∥BC，EF $=\frac{1}{2}$ BC…①
△DBC において，同様にして，HG∥BC，HG $=\frac{1}{2}$ BC…②　　中点連結定理を利用している。
①，②より，EF∥HG，EF ＝ HG
よって，四角形 EFGH は，1 組の向かい合う辺が平行で，その長さが等しいから平行四辺形である。

解説
平行四辺形になる条件「1 組の向かい合う辺が平行で，その長さが等しい」を導く。

例題 2

(1)　PQ ＝ PR の二等辺三角形。

証明　△ABC で，点 P，Q はそれぞれ辺 BA，BC の中点なので，PQ $=\frac{1}{2}$ AC…①
△ABD で同様にして，PR $=\frac{1}{2}$ BD…②
また仮定より，AC＝BD…③
①，②，③より PQ＝PR
よって，△PQR は PQ＝PR の二等辺三角形になる。

(2)　辺 AC と BD が垂直に交わるとき

解説
(2)　△ABC で，中点連結定理より，PQ∥AC
よって，∠BPQ＝∠BAC
また，△ABD で，中点連結定理より，PR∥BD
よって，∠APR＝∠ABD
ここで，∠QPR＝90° のとき，∠BPQ＋∠APR＝∠BAC＋∠ABD＝90° となるから，
AC⊥BD
以上より，辺 AC と BD が垂直に交わるときである。

28－1

⑴　**ひし形**　　⑵　**30°**

解説

⑴　中点連結定理より，

$PS=\frac{1}{2}AB$，$SQ=\frac{1}{2}CD$，$QR=\frac{1}{2}AB$，$RP=\frac{1}{2}CD$

ここで，$AB=CD$ だから，$PS=SQ=QR=RP$

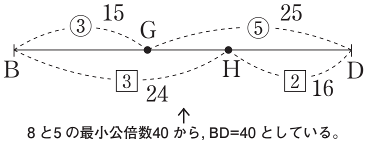
第29講・相似⑤ 相似の融合問題

例題 1

(1)　**15：9：16**　　(2)　**5：9**

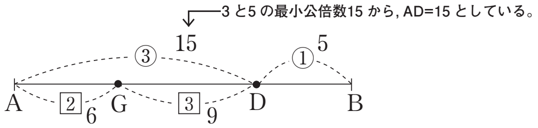
解説

(1)　AD∥BC より，BG：GD＝3：5　　AB∥DC より，BH：HD＝3：2



(2)　E を通り DC に平行な直線と AB との交点を G とすると，AG：GD ＝ 2：3

DF∥GE より，BF：FE＝BD：DG

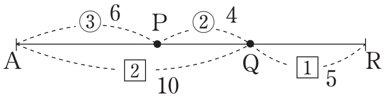


例題 2

(1)　**4：5**　　(2)　**6：5**

解説

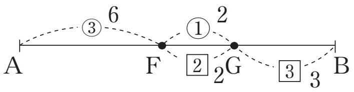
(1)



5 と 2 の最小公倍数 10 を利用して，AQ＝10 とすると，

PQ：QR＝4：5

(2)



1 と 2 の最小公倍数 2 を利用して，FG＝2 とすると，

AF：FB＝6：5

例題 3

(1)　$\dfrac{8}{3}$ **cm**　　(2)　$\left(\dfrac{80}{9}-\dfrac{16}{9}\pi\right)$**cm²**

解説

(2)　点 O から AC に垂線を下ろし，AC との交点を D，BC に垂線を下ろし，BC との交点を E とする。

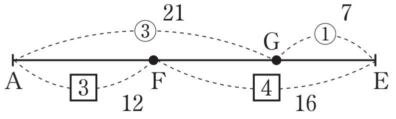
AOD と△OBE の面積の和から，半径 $\dfrac{8}{3}$ cm，中心角の和が 90° の 2 つのおうぎ形の面積の和をひけばよい。

29－1

(1)　**12：9：7**　　(2)　**12：5**

解説

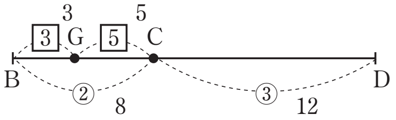
(1)



4 と 7 の最小公倍数 28 を利用して，AE＝28 とすると，

AF：FG：GE＝12：9：7

(2)



F を通り，AC に平行な直線と BD の交点を G とする。8 と 2 の最小公倍数 8 を利用して，BC＝8 とすると，DE：EF＝DC：CG＝12：5

29－2

(1)　**8cm**　　(2)　**2：3**　　(3)　**3：10**　　(4)　**5：4**

解説

(1)　∠ABF＝∠CBF＝∠AFB より，AF＝AB＝8(cm)

(2)　AG：GC＝AF：CB＝2：3

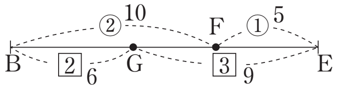
(3)　△BCG＝3S とおくと，AC：GC＝5：3 より，△ABC＝5S

よって，▱ABCD＝2△ABC＝10S となる。

(4)　∠CBE＝∠ABE＝∠CEB より，CE＝CB＝12，DE＝4 となり，

BF：FE＝CD：DE＝2：1

また，BG：GE＝AG：GC＝2：3 となるから，



上の図より，EF：FG＝5：(10－6)＝5：4

第7章　三平方の定理

第30講・三平方の定理①　三平方の定理の基本

例題 1

(1)　$x=6$　　(2)　$x=6$　　(3)　$x=2\sqrt{5}$

解説

(1)　三平方の定理より，$x^2+(3\sqrt{3})^2=(3\sqrt{7})^2$，$x^2=36$　　$x>0$ より，$x=6$

(2)　D から辺 BC に垂線 DI をひくと，△ABH≡△DCI より BH＝3(cm)

$x^2+3^2=(3\sqrt{5})^2$ より，$x=2\text{BH}=6$(cm)

△ABHの 3辺の比は，1:2:√5として計算してもよい。

例題 2

$\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ cm

解説

BH＝xとすると，CH＝$9-x$

△ABHで三平方の定理を用いると，$\text{AH}^2=7^2-x^2$…①

△ACHで三平方の定理を用いると，$\text{AH}^2=8^2-(9-x)^2$…②

①，②より，$7^2-x^2=8^2-(9-x)^2$　これを解いて，$x=\dfrac{11}{3}$

①に代入して，$\text{AH}^2=7^2-\left(\dfrac{11}{3}\right)^2=\dfrac{320}{9}$

AH＞0より，$\text{AH}=\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$(cm)

30－1

$x=20$

解説

$\text{AH}=\sqrt{13^2-5^2}=12$（AH＞0）より，AH＝12

$x=\sqrt{12^2+16^2}=20$（$x>0$）より，$x=20$

30－2

$x=2.5$

解説

$(5+x)^2-(5-x)^2=(10-x)^2-x^2$　これを解いて，$x=2.5$

第３１講・三平方の定理②　特別な直角三角形

例題 1

(1)　$x=4\sqrt{3}$　　(2)　$x=6$

解説

(1)　A から辺 BC に垂線 AH をひくと，

△ABH，△ACH は，ともに $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形だから，

AH＝2，BH＝CH＝$2\sqrt{3}$ となる。

よって，$x=2\text{BH}=4\sqrt{3}$ (cm)

例題 2

$\sqrt{3}$

解説

BP＝a とおくと，CP＝$2-a$

∠B＝∠C＝60° だから，PH＝$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，PI＝$\frac{\sqrt{3}}{2}(2-a)$

よって，PH＋PI＝$\sqrt{3}$

例題 3

(1)　∠QAB＝45°　　∠CBR＝15°　　(2)　AQ　$1+\sqrt{3}$　　AB　$\sqrt{6}$

(3)　$3+3\sqrt{3}$　　(4)　$\frac{13\sqrt{3}}{2}-6$

解説

(2)　BからAQに垂線BHをひくと，

△BHQ，△BHAはそれぞれ$1:2:\sqrt{3}$，$1:1:\sqrt{2}$の直角三角形になる。

(4)　求める面積は，

△PQR－四角形ABCD－△ADP－△AQB＝$\frac{1}{2}(3+3\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{3}}{2}(3+3\sqrt{3})-\sqrt{6}\times2\sqrt{6}$

$-\frac{1}{2}(2+2\sqrt{3})\times2\sqrt{3}-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

31－1

(1)　**$x=3\sqrt{2}$**　(2)　**6**　(3)　**AB　$3\sqrt{6}$，BC　$3\sqrt{3}+3$**

解説

(1)　△ABH，△AHC の 3 辺の比は，それぞれ $1:2:\sqrt{3}$，$1:1:\sqrt{2}$ より，BH$=\sqrt{3}$，AH$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$，$x=3\sqrt{2}$

(2)　C から辺 BA の延長にひいた垂線を CD とすると，CD$=\frac{1}{2}$AC$=2$

(3)　A から BC にひいた垂線を AD とすると，CD$=3$，AD$=3\sqrt{3}$，
また，∠B$=45°$ より，BD$=3\sqrt{3}$，AB$=3\sqrt{6}$，BC$=3\sqrt{3}+3$

31－2

(1)　**$6\sqrt{6}$**　(2)　**$12\sqrt{2}$**　(3)　**$279\sqrt{3}$**

解説

(2)　EからBCに垂線EHをひく。∠C$=60°$ より，EH$=\frac{\sqrt{3}}{2}$CE$=12\sqrt{2}$

第３２講・三平方の定理③ 図形の折り返し

例題 1

$\frac{13}{3}$ cm

解説

対角線 BD で折り曲げているから，∠FBD＝∠CBD…①

AD∥BC より，∠FDB＝∠CBD…②

①，②より，∠FBD＝∠FDB となり，FB＝FD

（平行線の中に角の二等分線が入ると，二等分三角形ができる。）

そこで，FB＝FD＝$x$cm とすると，AF＝$(6-x)$cm

△ABF で三平方の定理を用いると，$x^2=4^2+(6-x)^2$　　これを解いて，$x=\frac{13}{3}$

例題 2

$\frac{100}{3}$cm^2

解説

APの延長上の点をSとすると，∠RPQ＝∠SPQ

PS∥RQだから，∠SPQ＝∠RQP

よって，∠RPQ＝∠RQPとなり，PR＝QRを得る。

PからRQに垂線PHをひくと，PH＝8，HQ＝6

PR＝QR＝xとおくと，△PRHで，$x^2=8^2+(x-6)^2$

これを解いて，$x=\frac{25}{3}$　　△PQR＝$\frac{1}{2}\times\frac{25}{3}\times8=\frac{100}{3}$(cm^2)

例題 3

(1)　4　　(2)　30

解説

(1)　BP＝x とすると，EP＝AP＝$9-x$

　△BEP で三平方の定理により，$(9-x)^2=x^2+3^2$　　$x=4$

(2)　△PBE∽△ECR∽△QFR(3辺の比が 3：4：5)より，

　ER＝$\frac{5}{4}$EC＝$\frac{15}{2}$　　FR＝$9-\frac{15}{2}=\frac{3}{2}$　　FQ＝$\frac{4}{3}$FR＝2

　以上より，四角形 PERQ＝四角形 PEFQ－△QRF＝$(2+5)\times9\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times2=\frac{63}{2}-\frac{3}{2}=30$

32－1

$\frac{7}{4}$

解説

BE＝x とすると，AE＝EC＝8－x　　△ABE で三平方の定理より，

$(8-x)^2=x^2+6^2$　$x=\frac{7}{4}$

32－2

$\frac{75}{16}$ cm^2

解説

もとの長方形の左下の頂点をDとすると，

∠DBA＝∠CBA，AC∥DBより，∠DBA＝∠CAB

よって，△CABはCA＝CBの二等辺三角形

CからABに垂線CEをひくと，BE＝AE＝$\frac{5}{2}$，

また，AからDBに垂線AFをひくと，△AFB∽△CEB（3辺の比が3：4：5）だから，

CE＝$\frac{3}{4}$BE＝$\frac{15}{8}$

△ABC＝$\frac{1}{2}\times5\times\frac{15}{8}=\frac{75}{16}$（cm^2）

第３３講・三平方の定理④ 円と三平方の定理

例題 1

(1)　$x=6$　　(2)　$x=5$　　(3)　$x=4$

解説

(1)　点から AB に下ろした垂線の足を点 H とすると，

△OAH で，三平方の定理により，$AH^2=4^2-(\sqrt{7})^2=9$　$AH>0$ より，$AH=3$

$x=2AH=2\times3=6$（△OAH≡△OBHなので AH=BH）

(2)　$\angle OQP=90°$，$OQ=x$(cm) より，△POQ で三平方の定理により，

$(8+x)^2=x^2+12^2$　　$x=5$

(3)　O′からOPに垂線O′Hをひくと，△HOO′ で三平方の定理により，

$(8+x)^2=(8-x)^2+(8\sqrt{2})^2$，$x=4$（$OO'=8+x$）

例題 2

(1)　1：2　　(2)　6　　(3)　2　　(4)　$3-\sqrt{6}$

解説

(1)　$\angle BPC=90°$ より，△APC は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形。

(2)　$\angle BQC=90°$ より，$\angle BQA=90°$，$\angle ABQ=30°$

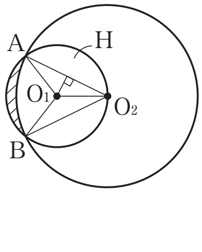
よって，$\angle POQ=60°$ となり，△OPQ は正三角形。

$BC=2PQ=6$

例題 3

(1)　$(2+\sqrt{3})\pi$　　(2)　$\dfrac{9\sqrt{3}-3\pi}{2}$

解説



(1)　右の図で，$O_1O_2=3$，$O_2H=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ より，

△O_1O_2H は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形になるので，$\angle AO_1B=120°$，

$\angle AO_2B=60°$

(3)　$\pi\times3^2\times\dfrac{120}{360}-\left\{\pi\times(3\sqrt{3})^2\times\dfrac{60}{360}-\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\dfrac{3}{2}\times2\right\}$

33−1

(1)　$x=2\sqrt{7}$　　(2)　$x=2\sqrt{3}$　　(3)　$x=12$

解説

(2)　O から AC に垂線 OH をひくと，∠AOC＝120°より，∠AOH＝60°

よって，$x=\mathrm{AO}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{AH}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times 3=2\sqrt{3}$

(3)　O から O′Q の延長に垂線 OR をひくと，OO′＝15，O′R＝4＋5＝9より，

$x=\mathrm{OR}=12$

33−2

(1)①　22.5°　②　$2\sqrt{6}$ cm　　(2)①　15°　②　$(2\sqrt{3}-2)$ cm

解説

(1)②　∠DAB＝45°より，△ABEの内角の和で∠AEB＝22.5°＝∠ABE

よって，AE＝AB＝4

△ABDは$1:1:\sqrt{2}$の直角三角形より，$\mathrm{AD}=2\sqrt{2}$　$\mathrm{DE}^2=4^2+(2\sqrt{2})^2=24$

(2)①　△POMはOM＝2，OP＝4より，$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形

よって，∠POM＝60°，∠BOP＝30°，$\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOP}$

②　$\mathrm{PM}=\sqrt{3}\mathrm{OM}=2\sqrt{3}$

また，△QMA は$1:1:\sqrt{2}$の直角三角形より，QM＝MA＝2

よって，$\mathrm{PQ}=(2\sqrt{3}-2)$ cm

第34講・三平方の定理⑤ 関数と三平方の定理

例題 1

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

解説

点Aのx座標を$t(t>0)$とすると，A$(t,\ 2t^2)$

ABとy軸の交点をCとすると，△ACOは$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形になるから，（∠OAC=60°より。）

$AC:CO=1:\sqrt{3}$

よって，$t:2t^2=1:\sqrt{3}$　　$t(2t-\sqrt{3})=0$

$t>0$より，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$2t^2=2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$

例題 2

(1)　**6**　　(2)　$\mathbf{3\sqrt{5}}$　　(3)　$\mathbf{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}}$

解説

(2)　A$(-1,\ 2)$，B$(2,\ 8)$より，$AB=\sqrt{(2+1)^2+(8-2)^2}=3\sqrt{5}$

(3)　△AOBの面積を利用して，

$\dfrac{1}{2}\times AB\times OH=6$より，$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times OH=6$　　$OH=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

例題 3

(1)　$\mathbf{(-3,\ 9)}$　　(2)　$\mathbf{7\sqrt{2}}$　　(3)　$\mathbf{6\sqrt{2}}$

解説

(3)　点Oから直線ABに垂線ODをひくと，BC=ODとなる。直線$y=x+12$とy軸との交点をEとすると，

△EDOは$1:1:\sqrt{2}$の直角三角形で，OE=12より，$OD=BC=6\sqrt{2}$

34−1

(1)　(6，9)　　(2)　$2\sqrt{2}$

解説

(1)　AB＝4　　Cのy座標をtとすると，$16=\dfrac{1}{2}\times 4(t-1)$　　$t=9$　　(6，9)

(2)　$AC=\sqrt{\{6-(-2)\}^2+(9-1)^2}=8\sqrt{2}$　　$\dfrac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times BH=16$　　$BH=2\sqrt{2}$

第３５講・三平方の定理⑥ 立体図形と三平方の定理

例題 1

(1)　$9\sqrt{2}\text{cm}^2$　　(2)　$18\sqrt{2}\text{cm}^3$

解説

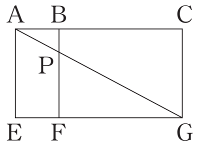
(2)　CD⊥AE，CD⊥BEより，CEは面ABEに垂直である。

よって，求める体積は，$\frac{1}{3}\times\triangle\text{ABE}\times\text{CD}=\frac{1}{3}\times9\sqrt{2}\times6=18\sqrt{2}$

例題 2

7cm

解説



右の展開図で，AG と BF の交点と P が一致したとき，

AP＋PG は最小。

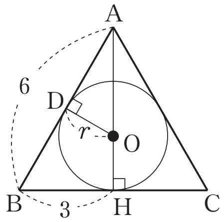
BP：FP ＝ AB：GF ＝ 1：3 より，FP ＝ 3

$\text{PH}=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=7$

例題 3

(1)　18π　　(2)　$\sqrt{3}$　　(3)　$3\sqrt{5}$

解説



(2)　右のような切り口の図をかくと，BD ＝ BH ＝ 3 より，AD ＝ 3

△ADO∽△AHB（3辺の比 1：2：$\sqrt{3}$）より，$r=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{AD}=\sqrt{3}$

35－1

(1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$cm^3　　(2) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$cm

解説

(2) $\triangle OBC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$(cm^2)

求める高さを $x$cm として,

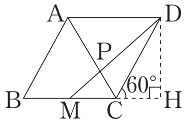
三角すい OABC の体積について, $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{7}}{2} \times x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}$が成り立つ。

35－2

$\sqrt{7}$cm

解説

右のような展開図をかく。



展開図は必要な部分だけですよ。

D から BC の延長上に垂線 DH をひくと,

$\angle DCH = 60°$ より, $\triangle DCH$ は $1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形

$DC = 2$ より, $CH = 1$, $DH = \sqrt{3}$, $DM^2 = DH^2 + HM^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7$

$DM > 0$ より, $DM = \sqrt{7}$

確認テスト解答

第１講・確認テスト

［1］　次の計算をしなさい。

（1）　$(-4a^3b^2c+12a^2b^2c^2-8abc^4)\div\left(-\dfrac{4}{3}ab\right)=\boxed{\text{ア}}\,a^{\boxed{\text{イ}}}bc-\boxed{\text{ウ}}\,abc^{\boxed{\text{エ}}}+\boxed{\text{オ}}\,c^{\boxed{\text{カ}}}$

（2）　$(x-3y)(2x+y)=\boxed{\text{キ}}\,x^2-\boxed{\text{ク}}\,xy-\boxed{\text{ケ}}\,y^2$

（3）　$\left(2a+\dfrac{1}{2}\right)^2=\boxed{\text{コ}}\,a^2+\boxed{\text{サ}}\,a+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$

（4）　$\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4}y\right)\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{4}y\right)=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}x^2-\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}y^2$

（5）　$(a+b)(2a-3b)-(a-4b)(4a-b)=-\boxed{\text{テ}}\,a^2+\boxed{\text{トナ}}\,ab-\boxed{\text{ニ}}\,b^2$

（6）　$(x+4)(x-4)+(x+3)(x+5)=\boxed{\text{ヌ}}\,x^2+\boxed{\text{ネ}}\,x-\boxed{\text{ノ}}$

（7）　$(x+6)(x+9)-(x-2)(x+6)=\boxed{\text{ハヒ}}\,x+\boxed{\text{フヘ}}$

（8）　$(3a-2b)(3a+b)-4(a-2b)^2=\boxed{\text{ホ}}\,a^2+\boxed{\text{マミ}}\,ab-\boxed{\text{ムメ}}\,b^2$

［2］　次の $\boxed{\text{モ}}$，$\boxed{\text{ヤ}}$ にあてはまる数を求めなさい。

（1）　$(x^2+ax-2)(2x^2-3x+5)$を展開したとき，x^2の係数が-5となった。このとき，aの値は$a=\boxed{\text{モ}}$である。

（2）　$104\times105-103\times106=\boxed{\text{ヤ}}$である。

解答

［1］	ア　3	イ　2	ウ　9	エ　2	オ　6	カ　4	キ　2	ク　5
	ケ　3	コ　4	サ　2	シ　1	ス　4	セ　4	ソ　9	タ　1
	チ　1	ツ　6	テ　2	ト　1	ナ　6	ニ　7	ヌ　2	ネ　8
	ノ　1	ハ　1	ヒ　1	フ　6	ヘ　6	ホ　5	マ　1	ミ　3
	ム　1	メ　8						
［2］	モ　2	ヤ　2						

解説

［1］

(1)　与式$=(-4a^3b^2c+12a^2b^2c^2-8abc^4)\times\left(-\dfrac{3}{4ab}\right)=3a^2bc-9abc^2+6c^4$

(5)　与式$=2a^2-ab-3b^2-(4a^2-17ab+4b^2)=-2a^2+16ab-7b^2$

(6)　与式$=x^2-16+(x^2+8x+15)=2x^2+8x-1$

(7)　与式$=x^2+15x+54-(x^2+4x-12)=11x+66$

(8)　与式$=9a^2-3ab-2b^2-(4a^2-16ab+16b^2)=5a^2+13ab-18b^2$

［2］

(1)　$x^2\times5+ax\times(-3x)+(-2)\times2x^2=(-3a+1)x^2$ より，$-3a+1=-5$　よって，$a=2$

(2)　$103=a$ とおくと，与式$=(a+1)(a+2)-a(a+3)=2$

第2講・確認テスト

[1]　$2x^2-xy+2y^2$を$x+y$，xyを用いて表しなさい。

$2x^2-xy+2y^2=\boxed{\text{ア}}\,(x+y)^2-\boxed{\text{イ}}\,xy$

[2]　次の$\boxed{\text{ウ}}$～$\boxed{\text{チ}}$にあてはまる数を求めなさい。

(1)　57330をできるだけ小さな自然数でわって，余りがなく，商が自然数の平方になるようにしたい。このとき，わる数は$\boxed{\text{ウエオ}}$である。

(2)　$21a=\dfrac{b^2}{6}$をみたす，最も小さな自然数a，bの値は，$a=\boxed{\text{カキ}}$，$b=\boxed{\text{クケ}}$である。

(3)　nを自然数とするとき，次の問いに答えなさい。

①　616を素因数分解しなさい。

$616=2^{\boxed{\text{コ}}}\times\boxed{\text{サ}}\times\boxed{\text{シス}}$

②　$\dfrac{616}{2n+1}$が整数となるようなnの値をすべて求めると，小さい順に，$n=\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タチ}}$である。

解答

[1]　ア　2　　イ　5

[2]　ウ　1　　エ　3　　オ　0　　カ　1　　キ　4　　ク　4　　ケ　2　　コ　3

サ　7　　シ　1　　ス　1　　セ　3　　ソ　5　　タ　3　　チ　8

解説

[1]

$2(x+y)^2=2x^2+4xy+2y^2$より，$2x^2-xy+2y^2=2(x+y)^2-5xy$

[2]

⑴　$57330=2\times3^2\times5\times7^2\times13$ より，求める数は，$2\times5\times13=130$

⑵　与式の両辺を 6 倍すると，$126a=b^2$　$126=2\times3^2\times7$ より，$a=2\times7=14$

$126\times14=2^2\times3^2\times7^2=(2\times3\times7)^2=b^2$ より，$b=2\times3\times7=42$

⑶ ②　$2n+1$は 3 以上の奇数であり，616 の約数である。616 の約数のうち，3 以上の奇数であるものは，7，11，77。よって，$2n+1=7$ のとき，$n=3$，$2n+1=11$ のとき，$n=5$，$2n+1=77$ のとき，$n=38$

第３講・確認テスト

[1]　次の式を因数分解しなさい。

（1）$12a^3bc-18ab^3c+24abc^3$

$=$ [ア] abc（[イ] $a^{[ウ]}-$ [エ] $b^{[オ]}+$ [カ] $c^{[キ]}$）

（2）$-3a^2-12a+15=-$ [ク] $(a+$ [ケ] $)(a-$ [コ] $)$

（3）$3ax^2-6ax-24a=$ [サ] $a(x+$ [シ] $)(x-$ [ス] $)$

（4）$2x^3-12x^2y+18xy^2=$ [セ] $x(x-$ [ソ] $y)^{[タ]}$

（5）$\frac{1}{16}x^2y^2-\frac{4}{9}z^2=\left(\frac{[チ]}{[ツ]}xy+\frac{[テ]}{[ト]}z\right)\left(\frac{[チ]}{[ツ]}xy-\frac{[テ]}{[ト]}z\right)$

（6）$(a-2)^2-36=(a+$ [ナ] $)(a-$ [ニ] $)$

（7）$(x-3y)(x+5y)-9y^2=(x+$ [ヌ] $y)(x-$ [ネ] $y)$

（8）$2(x+2)(x-4)-(x-1)^2+2=(x+$ [ノ] $)(x-$ [ハ] $)$

[2]　$101^2-98\times103+99\times98-97^2$ を計算すると，その値は [ヒフヘ] である。

解答

[1]	ア　6	イ　2	ウ　2	エ　3	オ　2	カ　4	キ　2	ク　3
	ケ　5	コ　1	サ　3	シ　2	ス　4	セ　2	ソ　3	タ　2
	チ　1	ツ　4	テ　2	ト　3	ナ　4	ニ　8	ヌ　6	ネ　4
	ノ　3	ハ　5						
[2]	ヒ　4	フ　0	ヘ　0					

解説

[1]

（5）与式$=\left(\frac{1}{4}xy\right)^2-\left(\frac{2}{3}z\right)^2=\left(\frac{1}{4}xy+\frac{2}{3}z\right)\left(\frac{1}{4}xy-\frac{2}{3}z\right)$

（6）与式$=(a-2+6)(a-2-6)=(a+4)(a-8)$

（7）与式$=x^2+2xy-15y^2-9y^2=x^2+2xy-24y^2=(x+6y)(x-4y)$

（8）与式$=2(x^2-2x-8)-(x^2-2x+1)+2=x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$

[2]

与式$=(101+97)(101-97)-98(103-99)=198\times4-98\times4=(198-98)\times4=400$

第4講・確認テスト

［1］　次の式を因数分解しなさい。

（1）　$xy+2x-3y-6=(x-$ ア $)(y+$ イ $)$

（2）　$a^2+9b^2-6ab-16=(a-$ ウ $b+$ エ $)(a-$ オ $b-$ カ $)$

（3）　$9a^2-16b^2+40b-25$

$=($ キ $a+$ ク $b-$ ケ $)($ キ $a-$ ク $b+$ ケ $)$

（4）　$4x^2-4x-9y^2-6y=($ コ $x+$ サ $y)($ シ $x-$ ス $y-$ セ $)$

（5）　$a^2+2ab-2a-14b-35=(a-$ ソ $)(a+$ タ $b+$ チ $)$

（6）　$9x^2-12xy+4y^2-3x+2y-6$

$=($ ツ $x-$ テ $y+$ ト $)($ ナ $x-$ ニ $y-$ ヌ $)$

［2］　次の問いに答えなさい。

（1）　$a^2-b^2=27$ となる自然数 a，b の値は，$(a, b)=($ ネ ，ノ $)$，

（ ハヒ ，フヘ ）である。

（2）　$a^3-4a=315$ となる自然数 a は，$a=$ ホ である。

解答

［1］	ア　3	イ　2	ウ　3	エ　4	オ　3	カ　4	キ　3	ク　4
	ケ　5	コ　2	サ　3	シ　2	ス　3	セ　2	ソ　7	タ　2
	チ　5	ツ　3	テ　2	ト　2	ナ　3	ニ　2	ヌ　3	
［2］	ネ　6	ノ　3	ハ　1	ヒ　4	フ　1	ヘ　3	ホ　7	

解説

［1］

⑴　２項ずつに分け,

与式$=(xy+2x)-(3y+6)=x(y+2)-3(y+2)=(x-3)(y+2)$

⑵　３項と１項に分け,

与式$=(a^2-6ab+9b^2)-16=(a-3b)^2-16=(a-3b+4)(a-3b-4)$

⑶　１項と３項に分け,

与式$=9a^2-(16b^2-40b+25)=9a^2-(4b-5)^2=\{3a+(4b-5)\}\{3a-(4b-5)\}$

⑷　２項ずつに分け,

与式$=(4x^2-9y^2)-(4x+6y)=(2x+3y)(2x-3y)-2(2x+3y)=(2x+3y)(2x-3y-2)$

⑸　与式$=(a^2-2a-35)+(2ab-14b)=(a-7)(a+5)+2b(a-7)=(a-7)(a+2b+5)$

⑹　与式$=(9x^2-12xy+4y^2)-(3x-2y)-6=(3x-2y)^2-(3x-2y)-6$

$=\{(3x-2y)+2\}\{(3x-2y)-3\}$

［2］

⑴　27を２つの自然数の積で表すと, $27=3\times9$, または1×27。$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$で,

$a+b>a-b$より, $\begin{cases} a+b=9 \\ a-b=3 \end{cases}$ のとき, $a=6, b=3$　また, $\begin{cases} a+b=27 \\ a-b=1 \end{cases}$ のとき,

$a=14$, $b=13$

⑵　$a^3-4a=a(a^2-4)=a(a+2)(a-2)=(a-2)\times a\times(a+2)$より, a^3-4aは２ずつ大きくなる３つの自然数の積で表される。315を２ずつ大きくなる３つの自然数の積で表すと, $315=3^2\times5\times7=5\times7\times9$だから, $a=7$

第５講・確認テスト

［1］　連続する３つの整数において，最小の数の平方と中央の数の平方の和に４を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，ある整数の平方となることを，次のように証明した。このとき，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ にあてはまる数を求めなさい。

証明　連続する３つの整数の中央の数を n とすると，最小の数は $n-\boxed{\text{ア}}$，最大の数は $n+\boxed{\text{イ}}$ と表される。

最小の数の平方と中央の数の平方の和に４を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，

$(n-\boxed{\text{ア}})^2+n^2+4-(n+\boxed{\text{イ}})^2$

$=n^2-\boxed{\text{ウ}}\,n+\boxed{\text{エ}}+n^2+4-(n^2+\boxed{\text{オ}}\,n+\boxed{\text{カ}})$

$=n^2-\boxed{\text{キ}}\,n+\boxed{\text{ク}}$

$=(n-\boxed{\text{ケ}})^2$

よって，連続する３つの整数において，最小の数の平方と中央の数の平方の和に４を加えた数から最大の数の平方をひいた差は，ある整数の平方となる。

［2］　次の $\boxed{\text{コ}}$ ～ $\boxed{\text{ハ}}$ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　$x=1.57$，$y=0.19$ のとき，$x^2-6xy+9y^2-x+3y+1$ の値を因数分解を利用して求めると，$x^2-6xy+9y^2-x+3y+1=(x-\boxed{\text{コ}}\,y)(x-\boxed{\text{コ}}\,y-1)+1$

$=\boxed{\text{サ}}\times\boxed{\text{シ}}+1$

$=\boxed{\text{ス}}$

(2)　$a+b=1$，$ab=-3$ のとき，$a^2b^3+a^3b^2$ の値を因数分解を利用して求めると，

$a^2b^3+a^3b^2=a^{\boxed{\text{セ}}}b^{\boxed{\text{ソ}}}(b+a)$

$=(-\boxed{\text{タ}})^{\boxed{\text{チ}}}\times\boxed{\text{ツ}}$

$=\boxed{\text{テ}}$

(3)　$a-b=-4$ のとき，$a^2-2ab+b^2-5a+5b-6$ の値を因数分解を利用して求めると，

$a^2-2ab+b^2-5a+5b-6=(a-b+\boxed{\text{ト}})(a-b-\boxed{\text{ナ}})$

$=(-\boxed{\text{ニ}})\times(-\boxed{\text{ヌネ}})$

$=\boxed{\text{ノハ}}$

解答

［1］　ア　1　イ　1　ウ　2　エ　1　オ　2　カ　1　キ　4　ク　4
ケ　2

［2］　コ　3　サ　1　シ　0　ス　1　セ　2　ソ　2　タ　3　チ　2
ツ　1　テ　9　ト　1　ナ　6　ニ　3　ヌ　1　ネ　0　ノ　3
ハ　0

解説

［2］

(1)　与式$=(x-3y)^2-(x-3y)+1=(x-3y)(x-3y-1)+1$

$=(1.57-3\times 0.19)\times(1.57-3\times 0.19-1)+1=1\times 0+1=1$

(3)　与式$=(a-b)^2-5(a-b)-6=(a-b+1)(a-b-6)=(-4+1)\times(-4-6)=-3\times(-10)$
$=30$

第６講・確認テスト

［1］　次の［ア］～［ク］にあてはまる数を求めなさい。

(1)　$\sqrt{540n}$ が整数になる自然数 n を小さい順に３つ求めると，$n=$［アイ］，［ウエ］，［オカキ］である。

(2)　$\sqrt{\dfrac{2520}{n}}$ が整数になる自然数 n の値の個数は［ク］個である。

［2］　次の［ケ］～［ツ］にあてはまる数を求めなさい。

(1)　$\sqrt{135-9n}$ が整数となる自然数 n を小さい順にすべて求めると，$n=$［ケ］，［コサ］，［シス］，［セソ］である。

(2)　$\sqrt{n^2+35}$ が整数となる自然数 n の値をすべて求めると，$n=$［タ］，［チツ］である。

解答

［1］　ア　1　　イ　5　　ウ　6　　エ　0　　オ　1　　カ　3　　キ　5　　ク　4

［2］　ケ　6　　コ　1　　サ　1　　シ　1　　ス　4　　セ　1　　ソ　5　　タ　1

　　　チ　1　　ツ　7

解説

［1］

(1)　$540=2^2\times3^3\times5$ より，n の値は小さい順に，$3\times5=15$，$2^2\times3\times5=60$，$3^3\times5=135$，…となる。

(2)　$2520=2^3\times3^2\times5\times7$ より，$\dfrac{2520}{n}=1$，2^2，3^2，$2^2\times3^2$ の４つの場合があるから，n の値の個数は４個である。

［2］

(1)　$135-9n=3^2\times(15-n)$ より，$15-n$ が整数の平方となればよい。よって，

$15-n=9$ のとき，$n=6$，$15-n=4$ のとき，$n=11$，$15-n=1$ のとき，$n=14$，

$15-n=0$ のとき，$n=15$

(2)　n^2+35 が整数の平方になればよいから，m を整数として，$n^2+35=m^2$ とすると，

$m^2-n^2=35$ より，$(m+n)(m-n)=35$

$m+n$，$m-n$ は整数で，$35=7\times5$，または 35×1 だから，

$\begin{cases} m+n=7 \\ m-n=5 \end{cases}$ のとき，$m=6$，$n=1$

$\begin{cases} m+n=35 \\ m-n=1 \end{cases}$ のとき，$m=18$，$n=17$

よって，$n=1$，17

第７講・確認テスト

[1]　次の計算をしなさい。

(1)　$\sqrt{27}\times\sqrt{80}\div\sqrt{6}\div3\sqrt{2}=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$

(2)　$\sqrt{8}-\dfrac{4}{3\sqrt{2}}+\sqrt{18}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{\boxed{ウエ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$

(3)　$\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{8})-\dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}=-\boxed{キ}+\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケ}}$

(4)　$(\sqrt{10}-\sqrt{5})^2-\dfrac{6}{\sqrt{2}}=\boxed{コサ}-\boxed{シス}\sqrt{\boxed{セ}}$

(5)　$(\sqrt{15}-1)^2-(\sqrt{5}+\sqrt{12})^2=-\boxed{ソ}-\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チツ}}$

(6)　$(2\sqrt{5}-3)(\sqrt{20}+3)-(\sqrt{3}-5\sqrt{2})(\sqrt{3}+3\sqrt{2})=\boxed{テト}+\boxed{ナ}\sqrt{\boxed{ニ}}$

(7)　$\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{4-\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\boxed{ヌ}+\boxed{ネ}\sqrt{\boxed{ノ}}-\boxed{ハ}\sqrt{\boxed{ヒ}}$

(8)　$(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3}-2)=\boxed{フ}-\boxed{ヘ}\sqrt{\boxed{ホ}}+\boxed{マ}\sqrt{\boxed{ミ}}$

解答

[1]	ア	2	イ	5	ウ	1	エ	7	オ	2	カ	6	キ	6	ク	3
	ケ	3	コ	1	サ	5	シ	1	ス	3	セ	2	ソ	1	タ	6
	チ	1	ツ	5	テ	3	ト	8	ナ	2	ニ	6	ヌ	3	ネ	2
	ノ	5	ハ	2	ヒ	2	フ	3	ヘ	2	ホ	6	マ	2	ミ	3

解説

［1］

(1)　与式$=3\sqrt{3}\times4\sqrt{5}\div\sqrt{6}\div3\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{3}\times4\sqrt{5}}{\sqrt{6}\times3\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{5}$

(2)　与式$=2\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+3\sqrt{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{17\sqrt{2}}{6}$

(3)　与式$=2\sqrt{3}-4-\dfrac{6-3\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}-4-2+\sqrt{3}=-6+3\sqrt{3}$

(4)　与式$=10-2\sqrt{50}+5-3\sqrt{2}=15-10\sqrt{2}-3\sqrt{2}=15-13\sqrt{2}$

(5)　与式$=15-2\sqrt{15}+1-(5+2\sqrt{60}+12)=16-2\sqrt{15}-17-4\sqrt{15}=-1-6\sqrt{15}$

(6)　与式$=20-9-(3-2\sqrt{6}-30)=11+27+2\sqrt{6}=38+2\sqrt{6}$

(7)　与式$=\dfrac{5+2\sqrt{5}+1}{2}-\dfrac{4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{2}=3+\sqrt{5}-2\sqrt{2}+\sqrt{5}=3+2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$

(8)　与式$=(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})-2(\sqrt{6}-\sqrt{3})=6-3-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}=3-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$

第８講・確認テスト

[1]　$x=\sqrt{7}-\sqrt{5}$，$y=\sqrt{7}+\sqrt{5}$のとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　$\dfrac{x-y}{xy}=-\sqrt{\boxed{ア}}$　　(2)　$x^2y+xy^2=\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}$

(3)　$x^2-y^2=-\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オカ}}$　　(4)　$x^2+y^2=\boxed{キク}$

[2]　$a=2+3\sqrt{2}$，$b=-1+\sqrt{2}$のとき，次の式の値を求めなさい。

$a^2-6ab+9b^2=\boxed{ケコ}$

[3]　次の $\boxed{サ}$ ～ $\boxed{ス}$ にあてはまる数を番号で答えなさい。

次の５つの数の大小を比べると，最も大きい数は $\boxed{サ}$，最も小さい数は $\boxed{シ}$ で，大きい方から３番目の数は $\boxed{ス}$ である。

①　$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　②　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③　$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　④　$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　⑤　$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

[4]　次の $\boxed{セ}$ ～ $\boxed{テ}$ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　$3\sqrt{7}$の小数部分を x，整数部分を y とすると，

$x=\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}-\boxed{タ}$，$y=\boxed{チ}$ である。

(2)　$\sqrt{3}+1$の整数部分を a，小数部分を b とすると，$a^2+4ab+4b^2$ の値は $\boxed{ツテ}$ である。

解答

[1]　ア　5　イ　4　ウ　7　エ　4　オ　3　カ　5　キ　2　ク　4

[2]　ケ　2　コ　5

[3]　サ　⑤　シ　①　ス　②

[4]　セ　3　ソ　7　タ　7　チ　7　ツ　1　テ　2

解説

［1］

(1)　$x-y=-2\sqrt{5}$, $xy=2$ より，与式 $=\dfrac{-2\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$

(2)　$x+y=2\sqrt{7}$ より，与式 $=xy(x+y)=2\times2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

(3)　与式 $=(x+y)(x-y)=2\sqrt{7}\times(-2\sqrt{5})=-4\sqrt{35}$

(4)　与式 $=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{7})^2-2\times2=28-4=24$

［2］

与式 $=(a-3b)^2=\{2+3\sqrt{2}-3(-1+\sqrt{2})\}^2=(2+3\sqrt{2}+3-3\sqrt{2})^2=5^2=25$

［3］　２乗して大きさを比べる。

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}=\dfrac{8}{36}$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}=\dfrac{27}{36}$，$\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2=\dfrac{2}{3}=\dfrac{24}{36}$，$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{4}{3}=\dfrac{48}{36}$，

$\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{9}{2}=\dfrac{162}{36}$

［4］

(1)　$7^2<(3\sqrt{7})^2=63<8^2$ より，$x=3\sqrt{7}-7$, $y=7$

(2)　$2<\sqrt{3}+1<3$ より，$a=2$, $b=\sqrt{3}-1$

与式 $=(a+2b)^2=\{2+2(\sqrt{3}-1)\}^2=(2+2\sqrt{3}-2)^2=(2\sqrt{3})^2=12$

第9講・確認テスト

[1]　次の方程式を解きなさい。

(1)　$4x^2=5x$　　$x=$ ア , $\dfrac{イ}{ウ}$

(2)　$4x^2-12x+9=0$　　$x=\dfrac{エ}{オ}$

(3)　$x^2+10x=2$　　$x=-$ カ $\pm$ キ $\sqrt{ク}$

(4)　$x^2-3x-1=0$　　$x=\dfrac{ケ\pm\sqrt{コサ}}{シ}$

(5)　$(x-1)(x-2)=6$　　$x=$ ス , $-$ セ

(6)　$(x-2)^2+5(x-2)=0$　　$x=$ ソ , $-$ タ

(7)　$(2x+3)(x-1)=-3x+3$　　$x=$ チ , $-$ ツ

(8)　$(2x-1)^2-21=3(x-3)(x+2)$　　$x=$ テ , $-$ ト

解答

[1]　ア　0　イ　5　ウ　4　エ　3　オ　2　カ　5　キ　3　ク　3
ケ　3　コ　1　サ　3　シ　2　ス　4　セ　1　ソ　2　タ　3
チ　1　ツ　3　テ　2　ト　1

解説

［1］

（1）　$4x^2=5x$　　$4x^2-5x=0$　　$x(4x-5)=0$　　$x=0,\ \frac{5}{4}$

（2）　$4x^2-12x+9=0$　　$(2x-3)^2=0$　　$x=\frac{3}{2}$

（3）　$x^2+10x=2$　　$x^2+10x+5^2=2+5^2$　　$(x+5)^2=27$

$x+5=\pm3\sqrt{3}$　　$x=-5\pm3\sqrt{3}$

（4）　$x^2-3x-1=0$　　$x^2-3x=1$　　$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=1+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$　　$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$　　$x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

（5）　$(x-1)(x-2)=6$　　$x^2-3x+2=6$　　$x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$　　$x=4,\ -1$

（6）　$(x-2)^2+5(x-2)=0$　　$(x-2)(x-2+5)=0$

$(x-2)(x+3)=0$　　$x=2,\ -3$

（7）　$(2x+3)(x-1)=-3x+3$　　$2x^2-2x+3x-3=-3x+3$　　$2x^2+4x-6=0$

両辺を２でわって，$x^2+2x-3=0$　　$(x-1)(x+3)=0$　　$x=1,\ -3$

（8）　$(2x-1)^2-21=3(x-3)(x+2)$　　$4x^2-4x+1-21=3(x^2-x-6)$

$4x^2-4x-20=3x^2-3x-18$　　$x^2-x-2=0$　　$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$

第10講・確認テスト

[1]　次の方程式を解きなさい。

(1)　$x^2+5x+3=0$　　$x=\dfrac{-\boxed{ア}\pm\sqrt{\boxed{イウ}}}{\boxed{エ}}$

(2)　$x^2-3x-2=0$　　$x=\dfrac{\boxed{オ}\pm\sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{ク}}$

(3)　$x^2-2x-5=0$　　$x=\boxed{ケ}\pm\sqrt{\boxed{コ}}$

(4)　$2x^2-3x-5=0$　　$x=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$，$-\boxed{ス}$

[2]　次の $\boxed{セ}$ ～ $\boxed{ナ}$ にあてはまる数を求めなさい。

(1)　二次方程式 $x^2+(a-3)x-2a+2=0$ の解の１つが６であるとき，$a=-\boxed{セ}$ であり，他の解は $\boxed{ソ}$ である。

(2)　二次方程式 $x^2+ax+b=0$ の２つの解が，二次方程式 $x^2-3x-18=0$ の２つの解のそれぞれ２倍であるとき，$a=-\boxed{タ}$，$b=-\boxed{チツ}$ である。

(3)　二次方程式 $x^2-4x-1=0$ の２つの解を p，q とするとき，$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}=-\boxed{テト}$ である。

(4)　二次方程式 $x^2+ax+12=0$ の２つの解がともに整数となるような a の値は，全部で $\boxed{ナ}$ 個である。

解答

[1]	ア　5	イ　1	ウ　3	エ　2	オ　3	カ　1	キ　7	ク　2
	ケ　1	コ　6	サ　5	シ　2	ス　1			
[2]	セ　5	ソ　2	タ　6	チ　7	ツ　2	テ　1	ト　8	ナ　6

解説

[1]

(1)　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times3}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$

(2)　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-2)}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

(3)　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-5)}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{6}}{2}=1\pm\sqrt{6}$

(4)　$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-5)}}{2\times2}=\dfrac{3\pm7}{4}=\dfrac{5}{2}$，$-1$

[2]

(1)　$x=6$ を代入して，$36+6(a-3)-2a+2=0$　　$4a+20=0$　　$a=-5$　よって，

$x^2-8x+12=0$　　$(x-6)(x-2)=0$　　もう１つの解は，2

(2)　$x^2-3x-18=0$　　$(x-6)(x+3)=0$　　$x=6$，-3

よって，$x^2+ax+b=0$ の解は，12 と -6

$x=12$，-6 をそれぞれ代入して，

$$\begin{cases}144+12a+b=0\cdots① \\ 36-6a+b=0\cdots②\end{cases}$$

①，②を連立方程式として解いて，$a=-6$，$b=-72$

(3)　$x^2-4x-1=0$ を解いて，$x=2\pm\sqrt{5}$

$p+q=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$　$pq=(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1$

よって，$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}=\dfrac{q^2+p^2}{pq}=\dfrac{(p+q)^2-2pq}{pq}=\dfrac{4^2-2\times(-1)}{-1}=-18$

(4)　$(x-1)(x-12)=0$ のとき，$a=-13$　　$(x-2)(x-6)=0$ のとき，$a=-8$

$(x-3)(x-4)=0$ のとき，$a=-7$　　$(x+1)(x+12)=0$ のとき，$a=13$

$(x+2)(x+6)=0$ のとき，$a=8$　　$(x+3)(x+4)=0$ のとき，$a=7$

よって，6 個

第11講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

(1)　ある自然数 x の平方から 8 をひいた数は，x に 8 を加えて 2 倍した数に等しい。このとき，$x =$ ［ア］である。

(2)　ある自然数から 5 をひいて 2 乗するところを，ある数に 5 をたして 2 倍したため，正しい答えより 4 小さくなった。このとき，ある自然数は［イ］，または［ウエ］である。

(3)　大小 2 つの自然数があり，それらの和は 25，平方の和は 397 である。このとき，大きい方の自然数は［オカ］，小さい方の自然数は［キ］である。

［2］　連続する 3 つの整数があり，最大の数の平方は，他の 2 つの数の積の 2 倍より 31 小さい。このとき，これら 3 つの整数のうちで最大の数は［ク］，または−［ケ］である。

［3］　連続する 3 つの奇数があり，小さい方の 2 つの数の平方の和から最大の数の平方をひくと，これら 3 つの奇数の和の 3 倍に等しくなる。このとき，これら 3 つの奇数のうちで最小のものは［コサ］である。

解答

［1］　ア　6　　イ　1　　ウ　1　　エ　1　　オ　1　　カ　9　　キ　6

［2］　ク　9　　ケ　3

［3］　コ　1　　サ　5

解説

［1］

(1)　$x^2-8=2(x+8)$　　これを解くと，$x=-4,\ 6$　　$x>0$ より，$x=6$

(2)　ある自然数を x とすると，$2(x+5)=(x-5)^2-4$　　これを解くと，$x=1,\ 11$

(3)　大きい方の自然数を x とすると，小さい方の自然数は $25-x$

$x^2+(25-x)^2=397$　これを解くと，$x=6,\ 19$　$x>\frac{25}{2}$ より，$x=19$

［2］連続する3つの整数のうちで最大の数を x とすると，他の2つの数は $x-2,\ x-1$

$x^2=2(x-2)(x-1)-31$　　これを解くと，$x=9,\ -3$

［3］連続する3つの奇数のうちで最小のものを x とすると，他の2つの数は $x+2,\ x+4$

$x^2+(x+2)^2-(x+4)^2=3(x+x+2+x+4)$　　これを解くと，$x=15,\ -2$

x は奇数だから，$x=15$

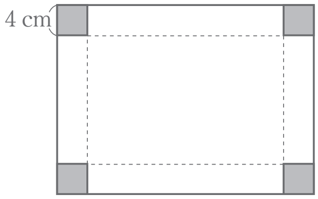
第12講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

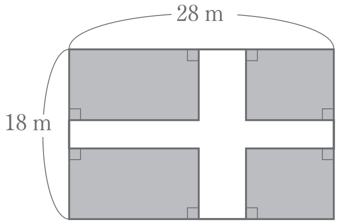
(1)　1辺の長さの和が25cmの2つの正方形の面積の和が317cm^2のとき，大きい方の正方形の1辺の長さは［アイ］cmである。

(2)　縦の長さと横の長さの比が1：2の長方形がある。この長方形の縦の長さを4cm長くし，横の長さを6cm短くして新しい長方形をつくったところ，面積が288cm^2になった。もとの長方形の縦の長さは［ウエ］cm，横の長さは［オカ］cmである。

［2］　横が縦より9cm長い長方形の厚紙がある。右の図のように，この厚紙の4すみから，1辺が4cmの正方形を切り取り，折り曲げて直方体の容器をつくったところ，容積が1768cm^3になった。このとき，はじめの厚紙の縦の長さは［キク］cm，横の長さは［ケコ］cmである。



［3］　縦18m，横28mの長方形の土地がある。右の図のように，長方形の辺に垂直になるように，縦と横に1本ずつ道をつくったところ，道以外の部分の面積が345m^2になった。縦の道の幅が横の道の幅より2m広いとき，縦の道の幅は［サ］mである。



解答

［1］　ア　1　　イ　4　　ウ　1　　エ　2　　オ　2　　カ　4

［2］　キ　2　　ク　5　　ケ　3　　コ　4

［3］　サ　5

解説

［1］

(1)　大きい方の正方形の１辺の長さを $x$cm とすると，小さい方の正方形の１辺の長さは $25-x$(cm) だから，　$x^2+(25-x)^2=317$　　これを解くと，　$x=14,\ 11$

$x>\frac{25}{2}$より，$x=14$

(2)　もとの長方形の縦の長さを $x$cm とすると，横の長さは $2x$cm だから，新しい長方形の縦の長さは $x+4$(cm)，横の長さは $2x-6$(cm)

よって，$(x+4)(2x-6)=288$　　これを解くと，$x=12,\ -13$

$x>0$ より，$x=12$

よって，もとの長方形の縦の長さは 12cm，横の長さは 24cm

［2］　はじめの厚紙の縦の長さを $x$cm とすると，横の長さは $x+9$(cm)，容器の底面の縦の長さは $x-8$(cm)，横の長さは $x+1$(cm) だから，

$4(x-8)(x+1)=1768$　　これを解くと，$x=25,\ -18$

$x>0$ より，$x=25$

よって，はじめの厚紙の縦の長さは 25cm，横の長さは 34cm

［3］　縦の道の幅を xm とすると，横の道の幅は $x-2$(m)

道以外の部分をひとつの長方形として考えると，

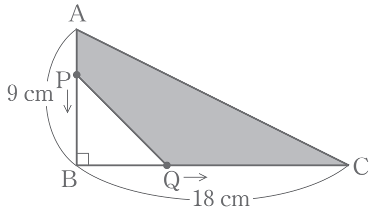
その縦の長さは $18-(x-2)$(m)，横の長さは $28-x$(m)

よって，$(20-x)(28-x)=345$　　これを解くと，$x=5,\ 43$

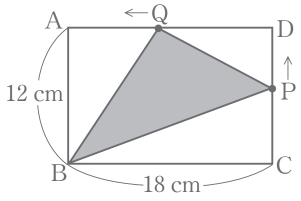
$x-2<18$ より，$x<20$　　よって，$x=5$

第13講・確認テスト

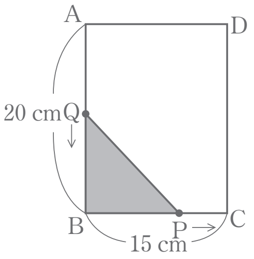
［1］　右の図のような，AB＝9cm，BC＝18cm，∠ABC＝90°の直角三角形 ABC がある。点 P は A を出発して AB 上を B まで，毎秒 1cm の速さで動く。また，点 Q は点 P が A を出発すると同時に B を出発して，BC 上を C まで毎秒 2cm の速さで動く。このとき，四角形 APQC の面積が 67cm^2 になるのは，1 回目が P，Q が出発してから［ア］秒後，2 回目が P，Q が出発してから［イ］秒後である。



［2］　右の図は，AB＝12cm，BC＝18cm の長方形 ABCD である。点 P，Q はそれぞれ頂点 C，D を同時に出発し，P は辺 CD 上を D まで秒速 2cm で，Q は辺 DA 上を A まで秒速 3cm で動く。このとき，△BPQ の面積が 84cm^2 になるのは，1 回目が P，Q が出発してから［ウ］秒後，2 回目が P，Q が出発してから［エ］秒後である。



［3］　右の図の四角形 ABCD は，AB＝20cm，BC＝15cm の長方形である。点 P，Q は同時に頂点 A を出発し，P は秒速 5cm で，Q は秒速 2cm で，長方形 ABCD の辺上を B，C を通って D まで動く。このとき，P が辺 BC 上，Q が辺 AB 上にあり，△BPQ の面積が 40cm^2 になるのは，P，Q が出発してから［オ］秒後である。



解答

［1］　ア　2　　イ　7
［2］　ウ　2　　エ　4
［3］　オ　6

解説

［1］　P，Q が出発してから x 秒後に四角形 APQC の面積が 67cm^2 になるとする。

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 18 \times 9 = 81(\text{cm}^2)$ だから，四角形 APQC の面積が 67cm^2 のとき，

$\triangle BPQ = 81 - 67 = 14(\text{cm}^2)$　また，このとき，$PB = 9 - x(\text{cm})$，$BQ = 2x\text{cm}$

よって，$\frac{1}{2} \times 2x \times (9 - x) = 14$ より，　$x(9 - x) = 14$

これを解くと，$x = 2$，7　これらは $0 < x < 9$ を満たす。

［2］　P，Q が出発して x 秒後に $\triangle BPQ = 84\text{cm}^2$ になるとする。

このとき，$CP = 2x\text{cm}$，$PD = 12 - 2x(\text{cm})$，$DQ = 3x\text{cm}$，$QA = 18 - 3x(\text{cm})$

$\triangle BPQ =$ 長方形 $ABCD - (\triangle ABQ + \triangle BCP + \triangle DPQ)$ だから，

$$12 \times 18 - \left\{\frac{1}{2} \times (18 - 3x) \times 12 + \frac{1}{2} \times 18 \times 2x + \frac{1}{2} \times 3x \times (12 - 2x)\right\} = 84$$

これを解くと，$x = 2$，4

これらは $0 < x < 6$ を満たす。

［3］　P，Q が出発してから x 秒後に $\triangle BPQ = 40\text{cm}^2$ になるとする。

このとき，$BP = 5x - 20(\text{cm})$，$QB = 20 - 2x(\text{cm})$ だから，

$$\frac{1}{2} \times (5x - 20) \times (20 - 2x) = 40$$

これを解くと，$x = 6$，8

P が BC 上にあり，Q が AB 上にあるときの x の範囲は $4 \leqq x \leqq 7$

よって，6 秒後

第14講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

(1)　ある展覧会の金曜日の入場者数は 1200 人であったが，土曜日は金曜日に比べて入場者数が x 割増加し，日曜日は土曜日に比べてさらに入場者数が x 割増加した。日曜日の入場者数が 2352 人であるとき，x の値は［ア］である。

(2)　原価が 1500 円の商品がある。この商品に原価の $2x$ 割の利益を見込んで定価をつけたが，商品が古くなったため，定価の x 割引きの値段で売ったところ，利益は 180 円であった。このとき，x の値は小さい順に［イ］，［ウ］である。

(3)　ある商品の定価は 600 円であり，定価通りの価格で販売すると，1 日の売上個数は 200 個である。ある日，この商品を定価の $3x$%引きの価格で販売したところ，その日の売上個数は 200 個の $2x$%増しであり，売上金額は 112200 円になったという。このとき，x の値は［エ］である。

［2］　長方形の縦の長さを x%長くし，横の長さを $\frac{1}{2}x$%短くして新しい長方形をつくったところ，面積が 8%増加した。このとき，x の値は小さい順に［オカ］，［キク］である。

解答

［1］　ア　4　　イ　2　　ウ　3　　エ　5

［2］　オ　2　　カ　0　　キ　8　　ク　0

解説

［1］

(1)　$1200\left(1+\frac{x}{10}\right)^2=2352$　$\left(1+\frac{x}{10}\right)^2=1.96$　$1+\frac{x}{10}=\pm 1.4$　$x>0$ より，$x=4$

(2)　売り値は，$1500\left(1+\frac{2x}{10}\right)\left(1-\frac{x}{10}\right)$円だから，$1500\left(1+\frac{2x}{10}\right)\left(1-\frac{x}{10}\right)=1680$

$x^2-5x+6=0$　$(x-2)(x-3)=0$　$x=2,\ 3$

(3)　定価の $3x$%引きの価格は，$600\left(1-\frac{3x}{100}\right)$円

200 個の $2x$%増しの売上個数は，$200\left(1+\frac{2x}{100}\right)$個

よって，$600\left(1-\frac{3x}{100}\right)\times 200\left(1+\frac{2x}{100}\right)=112200$　$6x^2+100x-650=0$

$x=\frac{-100\pm\sqrt{100^2+4\times 6\times 650}}{2\times 6}=\frac{-100\pm 160}{12}$，$x=5,\ -\frac{65}{3}$，$x>0$ より，$x=5$

［2］　もとの長方形の縦を a，横を b とすると，

新しい長方形の縦は，$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$，横は，$b\left(1-\frac{x}{200}\right)$

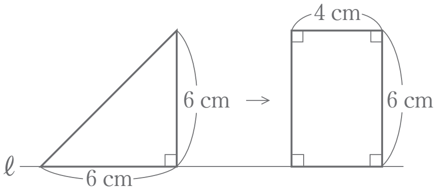
よって，$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)=ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$

両辺を ab でわると，$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)=1+\frac{8}{100}$，$x^2-100x+1600=0$

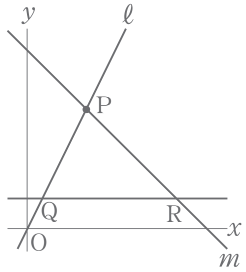
$(x-20)(x-80)=0$，$x=20,\ 80$

第15講・確認テスト

［1］　右の図のように，等しい辺の長さが 6cm の直角二等辺三角形と，縦 6cm，横 4cm の長方形が直線 ℓ 上にあり，直角二等辺三角形が直線 ℓ に沿って，毎秒 1cm の速さで右に向かって移動する。このとき，直角二等辺三角形と長方形の重なった部分の面積がはじめて 13.5cm^2 となるのは，直角二等辺三角形と長方形が重なり始めてから［ア］秒後である。



［2］　右の図で，直線 ℓ は $y=2x$ のグラフ，直線 m は $y=-x+12$ のグラフであり，点 P は直線 ℓ と直線 m の交点である。直線 ℓ 上の $x>0$ の部分に点 Q をとり，Q を通り x 軸に平行な直線が直線 m と交わる点を R とする。このとき，△PQR＝27 となる Q の x 座標は小さい順に［イ］，［ウ］である。



［3］　濃度が 15％の食塩水が 10kg 入った容器がある。この容器の中から $x$kg の食塩水をくみ出して，かわりに同じ重さの水を入れた。さらに，はじめにくみ出した食塩水の 2 倍の重さの食塩水をくみ出し，かわりに同じ重さの水を入れたところ，容器の中の食塩水の濃度は 7.2％になった。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　はじめに $x$kg の食塩水をくみ出し，同じ重さの水を入れたあとの，容器の中の食塩水の濃度を x を用いた式で表すと，$\dfrac{\boxed{エ}(\boxed{オカ}-x)}{\boxed{キ}}$％である。

(2)　x の値は［ク］である。

解答

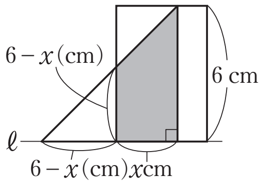
［1］　ア　3

［2］　イ　1　　ウ　7

［3］　エ　3　　オ　1　　カ　0　　キ　2　　ク　2

解説

［1］　右の図のようになった場合だから，

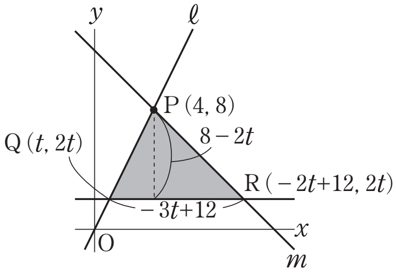


$\frac{1}{2}x\{(6-x)+6\}=13.5$　　$x^2-12x+27=0$

$(x-3)(x-9)=0$　　$x=3,\ 9$

$0 \leqq x \leqq 4$ より，$x=3$

［2］　$2x=-x+12$ より，$x=4$



$x=4$ を $y=2x$ に代入して，$y=8$　よって，P(4，8)

点 Q の x 座標を t とする。

Q は $y=2x$ 上の点だから，$y=2t$ より，Q(t，$2t$)

R は $y=-x+12$ 上の点で，y 座標が Q と等しいから，

$2t=-x+12$，$x=-2t+12$ より，R($-2t+12$，$2t$)

よって，QR$=(-2t+12)-t=-3t+12$　また，QR を底辺としたときの高さは，$8-2t$

$\frac{1}{2}(-3t+12)(8-2t)=27$　　$t^2-8t+7=0$　　$(t-1)(t-7)=0$　　$t=1,\ 7$

［3］

(1)　食塩水を $x$kg くみ出したとき，容器の中の食塩水にとけている食塩の重さは，

はじめにとけていた食塩の重さの $\frac{10-x}{10}$ 倍になる。

よって，水を同じ重さだけ入れたときの食塩水の濃度も $\frac{10-x}{10}$ 倍になるから，

$15\times\frac{10-x}{10}=\frac{3(10-x)}{2}$ (%)

(2)　2 回目に食塩水をくみ出して，水を入れたあとの容器の中の食塩水の濃度は，

$\frac{3(10-x)}{2}\times\frac{10-2x}{10}$ (%)になる。

よって，$\frac{3(10-x)(5-x)}{10}=7.2$，$x^2-15x+26=0$

$(x-2)(x-13)=0$，$x=2,\ 13$　$0<x<5$ より，$x=2$

第16講・確認テスト

［1］　時速 $x$km で走る自動車がブレーキをかけ始めてから停止するまでに進む距離（制動距離）を ym とすると，y は x の２乗に比例し，時速 36km のときの制動距離は 9mであるという。次の問いに答えなさい。

(1)　y を x の式で表すと，$y=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウエ}}x^2$ である。

(2)　時速 60km のときの制動距離と時速 48km のときの制動距離の差は $\boxed{オ}$ m である。

(3)　制動距離が 49m のときの自動車の速さは時速 $\boxed{カキ}$ kmである。

［2］　次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ について，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の変域は $\boxed{ク} \leqq y \leqq \boxed{ケ}$ である。

(2)　関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-6 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 27$ となった。このとき，a の値は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

(3)　関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ について，x の変域が $a \leqq x \leqq a+6$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 4$ となった。このとき，a の値は小さい順に $a=-\boxed{シ}$，$-\boxed{ス}$ である。

解答

［1］　ア　1　　イ　1　　ウ　4　　エ　4　　オ　9　　カ　8　　キ　4

［2］　ク　0　　ケ　8　　コ　3　　サ　4　　シ　4　　ス　2

解説

［1］

⑴　$y=ax^2$ に$x=36$，$y=9$ を代入して，$9=36^2a$，$a=\dfrac{9}{36^2}=\dfrac{1}{144}$

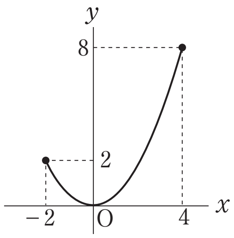
⑵　$y=\dfrac{1}{144}x^2$ に $x=60$ を代入して，$y=\dfrac{1}{144}\times60^2=25$(m)

$x=48$ を代入して，$y=\dfrac{1}{144}\times48^2=16$(m)

⑶　$y=\dfrac{1}{144}x^2$ に $y=49$ を代入して，$49=\dfrac{1}{144}x^2$　　これを解くと，$x=\pm84$

$x>0$ より，$x=84$

［2］

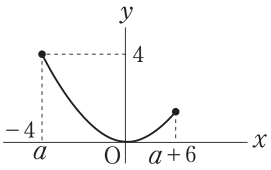


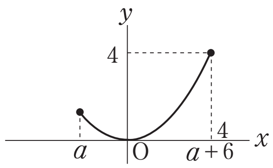
⑴　右のグラフより，y の変域は $0\leqq y\leqq8$

⑵　$x=-6$ のとき $y=27$ になるから，

$27=36a$，$a=\dfrac{3}{4}$

⑶　y の最小値が 0 なので，$a\leqq0$，$a+6\geqq0$ であることがわかる。また，$y=4$ となるのは，x の値が a，または $a+6$ のときである。$4=\dfrac{1}{4}x^2$ より，$x=\pm4$





よって，$a=-4$　　または，$a+6=4$ より，$a=-2$

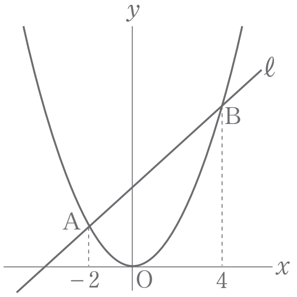
第17講・確認テスト

［1］　次の問いに答えなさい。

⑴　関数 $y=ax^2$ について，x の値が -6 から -2 まで増加するときの変化の割合が2であるとき，a の値は $-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

⑵　関数 $y=\frac{2}{3}x^2$ について，x の値が a から $a+3$ まで増加するときの変化の割合が6であるとき，a の値は $\boxed{ウ}$ である。

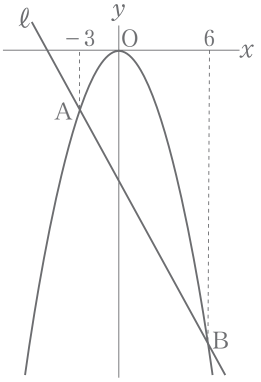
［2］　右の図の曲線は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。この曲線と直線 ℓ との交点をA，Bとする。Aの x 座標が -2，Bの x 座標が4であるとき，次の問いに答えなさい。



⑴　直線 ℓ の傾きは $\boxed{エ}$，切片は $\boxed{オ}$ である。

⑵　△OABの面積は $\boxed{カキ}$ である。

［3］　右の図の曲線は関数 $y=ax^2$ のグラフであり，直線 ℓ は関数 $y=-2x-12$ のグラフである。この曲線と直線 ℓ との交点をA，Bとする。Aの x 座標が -3，Bの x 座標が6であるとき，次の問いに答えなさい。



⑴　a の値は $-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

⑵　y 軸上の原点より下の部分に点Cをとり，△OCB＝△OABとするとき，Cの y 座標は $-\boxed{コサ}$ である。

解答

［1］　ア　1　　イ　4　　ウ　3

［2］　エ　1　　オ　4　　カ　1　　キ　2

［3］　ク　2　　ケ　3　　コ　1　　サ　8

解説

［1］

⑴　$a(-6-2)=2$ より，$a=-\frac{1}{4}$

⑵　$\frac{2}{3}(a+a+3)=6$ より，$a=3$

［2］

⑴　A$(-2,\ 2)$，B$(4,\ 8)$ から，直線 AB の傾きは，$\frac{8-2}{4-(-2)}=1$

直線 ℓ の式を $y=x+b$ とおいて，$x=4$，$y=8$ を代入すると，

$8=4+b$ より，$b=4$

よって，切片は 4

⑵　$\frac{1}{2}\times4\times\{4-(-2)\}=12$

［3］

⑴　A$(-3,\ -6)$ より，$-6=a\times(-3)^2$，$a=-\frac{2}{3}$

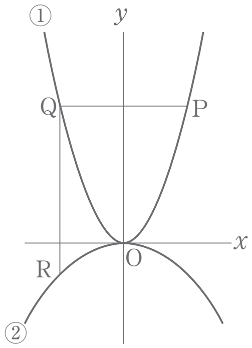
⑵　OB // ACのとき△OCB＝△OABとなる。

直線 OB の傾きは -4 だから，A を通り，OB と平行な直線の式は，$y=-4x-18$

よって，C の y 座標は -18

第18講・確認テスト

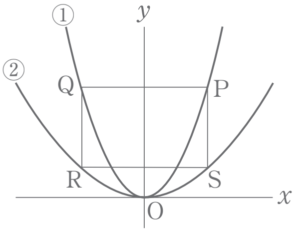
［1］　右の図で，放物線①は関数 $y=2x^2$ のグラフ，放物線②は関数 $y=ax^2$ のグラフである。放物線①上の x 座標が $t(t>0)$ である点をＰとし，Ｐを通り，x 軸に平行な直線が放物線①と交わる点をQ，Ｑを通り，y 軸に平行な直線が放物線②と交わる点をＲとする。次の問いに答えなさい。



⑴　$t=2$ のとき，直線 PR の傾きが $\frac{5}{2}$ であった。このとき，a の値は $-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

⑵　a の値が⑴で求めた値であるとき，PQ：QR＝3：5 となる t の値は $\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

［2］　右の図で，放物線①は関数 $y=x^2$ のグラフ，放物線②は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。点Ｐ，Ｑは放物線①上の点，点Ｒ，Ｓは放物線②上の点であり，四角形 PQRS の各辺はそれぞれ x 軸，または y 軸と平行である。Ｐの x 座標を $t(t>0)$ とするとき，次の問いに答えなさい。



⑴　Ｒの座標を t を用いて表すと，$\left(-t,\ \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}t^2\right)$ である。

⑵　$t=4$ のとき，直線 PR の式は $y=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}x+\boxed{ケコ}$ である。

⑶　四角形 PQRS が正方形になるとき，t の値は $\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

解答

［1］　ア　1　　イ　2　　ウ　4　　エ　3

［2］　オ　1　　カ　4　　キ　3　　ク　2　　ケ　1　　コ　0　　サ　8　　シ　3

解説

［1］

⑴　P(2，8) より，Q(−2，8)，R(−2，4a)

よって，直線 PR の傾きは，$\dfrac{8-4a}{2-(-2)}$だから，$\dfrac{8-4a}{4}=\dfrac{5}{2}$，$8-4a=10$，$a=-\dfrac{1}{2}$

⑵　P(t，$2t^2$) より，Q($-t$，$2t^2$)，R$\left(-t,\ -\dfrac{1}{2}t^2\right)$

よって，PQ$=2t$，QR$=\dfrac{5}{2}t^2$

$2t:\dfrac{5}{2}t^2=3:5$，$3t^2-4t=0$，$t(3t-4)=0$　　$t>0$ より，$t=\dfrac{4}{3}$

［2］

⑴　P(t，t^2) より，Q($-t$，t^2)，R$\left(-t,\ \dfrac{1}{4}t^2\right)$

⑵　P(4，16)，R(−4，4) より，傾きは，$\dfrac{16-4}{4-(-4)}=\dfrac{3}{2}$

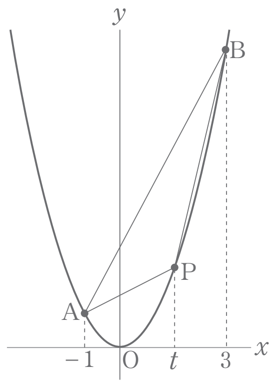
$y=\dfrac{3}{2}x+b$ に $x=4$，$y=16$ を代入して，$b=10$

よって，求める直線の式は，$y=\dfrac{3}{2}x+10$

⑶　PQ$=2t$，QR$=\dfrac{3}{4}t^2$ より，$2t=\dfrac{3}{4}t^2$，$3t^2-8t=0$，$t(3t-8)=0$　　$t>0$ より，$t=\dfrac{8}{3}$

第19講・確認テスト

［1］　右の図で，放物線は関数 $y=2x^2$ のグラフである。2 点 A，B はこの放物線上の点であり，それぞれの x 座標は -1，3 である。放物線上の A と B の間に点 P をとり，3 点 P，A，B を結んで△PAB をつくる。P の x 座標を $t(-1<t<3)$ とするとき，次の問いに答えなさい。

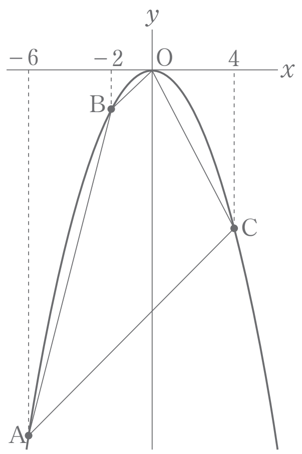


⑴　2 点 A，B を通る直線の式は，$y=$［ア］$x+$［イ］である。

⑵　$t=2$ のとき，△PAB の面積は［ウエ］である。

⑶　P を通り，x 軸に平行な直線が△PAB の面積を 2 等分するとき，P の座標は（$\sqrt{\text{［オ］}}$，［カキ］）である。

［2］　右の図で，放物線は関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフである。3 点 A，B，C はこの放物線上の点であり，x 座標はそれぞれ -6，-2，4 である。このとき，次の問いに答えなさい。



⑴　四角形 OBAC の面積は［クケ］である。

⑵　原点を通り，四角形 OBAC の面積を 2 等分する直線の式は $y=$［コ］x である。

解答

［1］　ア　4　　イ　6　　ウ　1　　エ　2　　オ　5　　カ　1　　キ　0

［2］　ク　7　　ケ　2　　コ　7

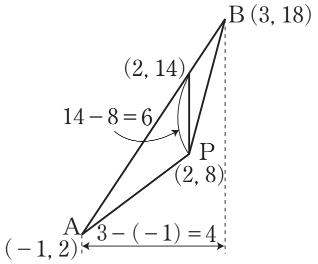
解説

［1］

(1)　A$(-1,\ 2)$，B$(3,\ 18)$ より，直線 AB の式は，$y=4x+6$

(2)　P$(2,\ 8)$ より，P を通り，y 軸に平行な直線が直線 AB と交わる点の座標は，$(2,\ 14)$

右の図のように考えて，$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$



(3)　線分 AB の中点の座標は，$(1,\ 10)$

P を通り，x 軸に平行な直線がこの点を通ることから，

P の y 座標は 10

$y=2x^2$ に $x=t$，$y=10$ を代入して，$10=2t^2$，$t=\pm\sqrt{5}$

$-1<t<3$ より，$t=\sqrt{5}$

［2］

(1)　各点の座標は，A$(-6,\ -18)$，B$(-2,\ -2)$，C$(4,\ -8)$

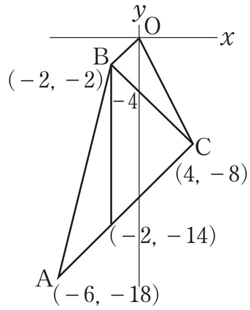
直線 BO の式は，$y=x$

直線 AC の式は，$y=x-12$

直線 BC の式は，$y=-x-4$

四角形 OBAC＝△OBC＋△BAC だから，右の図より，

$\frac{1}{2}\times 4\times\{4-(-2)\}+\frac{1}{2}\times\{-2-(-14)\}\times\{4-(-6)\}=72$

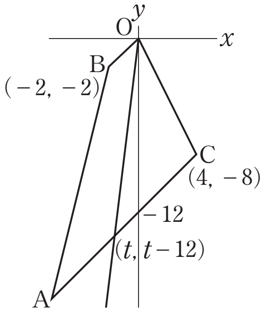


(2)　四角形 OBAC が y 軸によって分けられる 2 つの図形のうち，C を含む三角形の面積は，$\frac{1}{2}\times 12\times 4=24$ だから，問題の直線と直線 AC との交点は y 軸の左側にある。

右の図のように，問題の直線と直線 AC との交点の x 座標を t とすると，$\frac{1}{2}\times 12\times(4-t)=72\times\frac{1}{2}$ より，$t=-2$

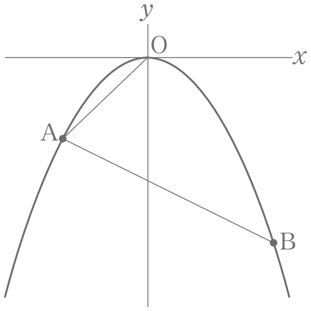
y 座標は，$-2-12=-14$

よって，求める直線は原点と点 $(-2,\ -14)$ を通るから，$y=7x$



第20講・確認テスト

[1]　右の図で，放物線は関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフであり，2点A，Bはこの放物線上の点である。直線OAの傾きが1，直線ABの傾きが $-\frac{1}{2}$ のとき，次の問いに答えなさい。

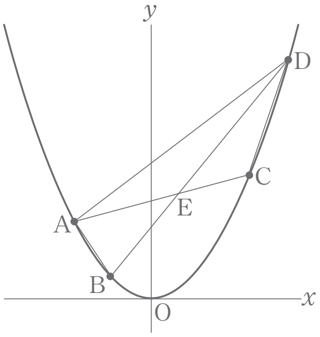


(1)　点Aの座標は（−［ア］，−［イ］）である。

(2)　点Bの座標は $\left(［ウ］, -\frac{［エ］}{［オ］}\right)$ である。

(3)　放物線上に点P，Qをとり，PQ∥ABとなるようにする。Pの x 座標を p，Qの x 座標を q とすると，$q=-p+$［カ］である。

[2]　右の図で，放物線は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。4点A，B，C，Dはこの放物線上の点であり，点A，Bの x 座標はそれぞれ−4，−2で，直線ADの傾きは $\frac{3}{4}$ である。また，△ABE＝△CDEである。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　点Dの座標は $\left(［キ］, \frac{［クケ］}{［コ］}\right)$ である。

(2)　点Cの座標は $\left(［サ］, \frac{［シス］}{［セ］}\right)$ である。

解答

[1]　ア　2　　イ　2　　ウ　3　　エ　9　　オ　2　　カ　1

[2]　キ　7　　ク　4　　ケ　9　　コ　4　　サ　5　　シ　2　　ス　5　　セ　4

解説

[1]

(1)　点Ａの x 座標を a とすると，$-\frac{1}{2}(0+a)=1$ より，$a=-2$

$y=-\frac{1}{2}x^2$ に $x=-2$ を代入して，$y=-2$

(2)　点Ｂの x 座標を b とすると，$-\frac{1}{2}(-2+b)=-\frac{1}{2}$ より，$b=3$

$y=-\frac{1}{2}x^2$ に $x=3$ を代入して，$y=-\frac{9}{2}$

(3)　$-\frac{1}{2}(p+q)=-\frac{1}{2}$ より，$p+q=1$　よって，$q=-p+1$

[2]

(1)　Ｄの x 座標を d とすると，$\frac{1}{4}(-4+d)=\frac{3}{4}$ より，$d=7$

$y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=7$ を代入して，$y=\frac{49}{4}$

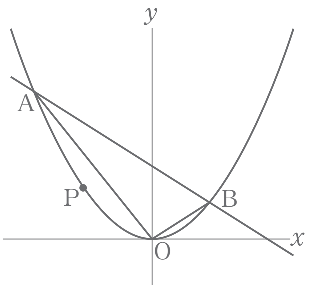
(2)　△ABE＝△CDE より，△ABD＝△ACD だから，BC // AD である。

よって，Ｃの x 座標を c とすると，$\frac{1}{4}(-2+c)=\frac{3}{4}$ より，$c=5$

$y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=5$ を代入して，$y=\frac{25}{4}$

第21講・確認テスト

[1]　右の図で，放物線と直線は，それぞれ関数 $y=\frac{1}{4}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x+2$ のグラフであり，点 A，B は放物線と直線の交点である。また，放物線上の点を P とする。このとき，次の問いに答えなさい。

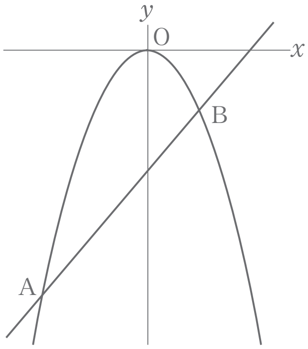


(1)　点 A の座標は (−［ア］，［イ］)，点 B の座標は (［ウ］，［エ］) である。

(2)　△PAB＝△OAB となる点 P の x 座標は，

−［オ］，−［カ］±$\sqrt{［キク］}$ である。ただし，P は原点とは異なる点とする。

[2]　右の図で，放物線と直線は，それぞれ関数 $y=-x^2$，$y=2x-8$ のグラフであり，点 A，B は放物線と直線の交点である。これについて，次の問いに答えなさい。



(1)　点 A の座標は (−［ケ］，−［コサ］)，点 B の座標は (［シ］，−［ス］) である。

(2)　放物線上の直線より下の部分に点 P をとり，△PAB＝2△OAB となるようにする。このとき，P の x 座標は −［セ］，［ソ］ である。

(3)　x 軸上の，直線 $y=2x-8$ より左の部分に点 Q をとり，△QAB＝18 となるようにするとき，Q の x 座標は［タ］である。

解答

[1]	ア　4	イ　4	ウ　2	エ　1	オ　2	カ　1	キ　1	ク　7
[2]	ケ　4	コ　1	サ　6	シ　2	ス　4	セ　6	ソ　4	タ　1

解説

[1]

(1)　$y=\frac{1}{4}x^2$ と $y=-\frac{1}{2}x+2$ を連立方程式として解く。

$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x+2$，$x^2+2x-8=0$，$(x+4)(x-2)=0$ より，$x=-4$，2

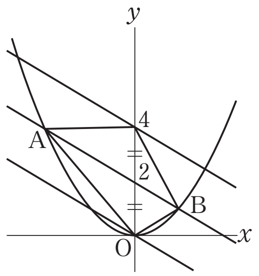
(2)　直線 $y=-\frac{1}{2}x$ が放物線と交わる点がＰの場合，$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x$，

$x^2=-2x$ より，$x=0$，-2

直線 $y=-\frac{1}{2}x+4$ が放物線と交わる点をＰとすると，

△PAB は△OAB と底辺，高さがともに等しくなるので，

△PAB＝△OAB となる。



$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x+4$，$x^2=-2x+16$，

$x^2+2x-16=0$ より，$x=-1\pm\sqrt{17}$

[2]

(1)　$y=-x^2$ と $y=2x-8$ を連立方程式として解く。

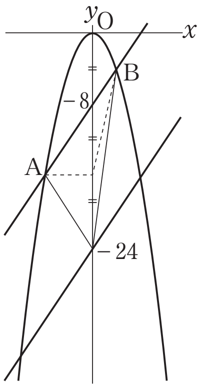
$-x^2=2x-8$，　$x^2+2x-8=0$，$(x+4)(x-2)=0$ より，

$x=-4, 2$

(2)　直線 AB の切片は -8 だから，直線 AB に平行で，切片が，

$-8\times3=-24$ の直線が放物線と交わる点の x 座標を求める。

$-x^2=2x-24$，$x^2+2x-24=0$，$(x+6)(x-4)=0$ より，$x=-6, 4$

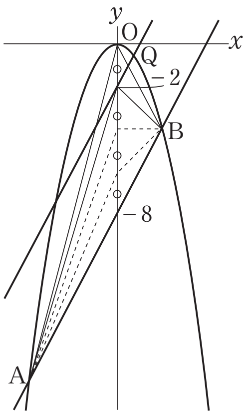


(3)　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times8\times\{2-(-4)\}=24$ より，

△OAB∶△QAB＝24∶18＝4∶3

直線 AB に平行で，切片が，$-8\times\frac{1}{4}=-2$ の直線が x 軸と交わる点の x 座標を求める。

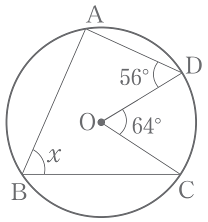
$0=2x-2$ より，$x=1$



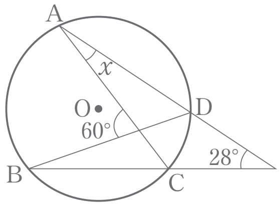
第22講・確認テスト

[1]　次のそれぞれの図で，4点A，B，C，Dは円周上の点，点Oは円の中心である。このとき，∠xの大きさをそれぞれ求めなさい。

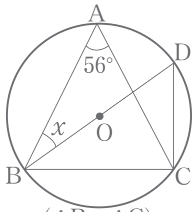
(1)　∠x＝[アイ]度



(2)　∠x＝[ウエ]度

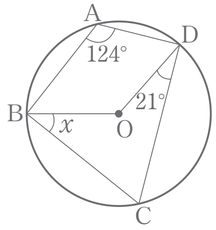


(3)　∠x＝[オカ]度

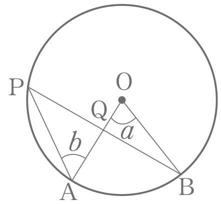


(AB＝AC)

(4)　∠x＝[キク]度

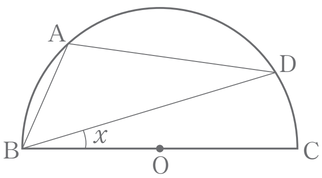


[2]　右の図で，3点P，A，Bは円周上の点で，点Oは円の中心である。また，線分OAとPBの交点をQとする。∠AOB，∠OAPの大きさをそれぞれa，bとするとき，∠OBPの大きさをa，bを用いた式で表しなさい。



∠OBP＝$-\dfrac{[ケ]}{[コ]}a+b$(度)

[3]　右の図で，4点A，B，C，Dは円Oの周上の点であり，線分BCは円の直径である。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　∠CBD＝x度とするとき，∠BADの大きさをxを用いて表しなさい。

∠BAD＝x＋[サシ](度)

(2)　∠CBD＝18°，$\overset{\frown}{BA}:\overset{\frown}{AD}=1:2$のとき，∠ADB＝[スセ]度である。

解答

[1]　ア　6　　イ　6　　ウ　1　　エ　6　　オ　2　　カ　8　　キ　3　　ク　5

[2]　ケ　1　　コ　2

[3]　サ　9　　シ　0　　ス　2　　セ　4

解説

[1]

(1)　O と A を結ぶ。OA＝OD より，$\angle AOD=180^\circ-56^\circ\times2=68^\circ$

$\angle AOC=68^\circ+64^\circ=132^\circ$

$\overset{\frown}{AC}$に対する中心角と円周角の関係から，$\angle x=132^\circ\times\frac{1}{2}=66^\circ$

(2)　三角形の外角と内角の関係から，$\angle ACB=x+28^\circ$

$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角から，$\angle CBD=\angle CAD=x$

三角形の外角と内角の関係から，$x+(x+28^\circ)=60^\circ$，$x=16^\circ$

(3)　$\overset{\frown}{AD}$に対する円周角から，$\angle ACD=\angle ABD=x$

$\angle BCD=90^\circ$ より，$\angle ACB=90^\circ-x$

AB＝AC より，$\angle ACB=(180^\circ-56^\circ)\div2=62^\circ$　よって，$90^\circ-x=62^\circ$，$x=28^\circ$

(4)　$\overset{\frown}{BCD}$に対する中心角は，$124^\circ\times2=248^\circ$

よって，$\overset{\frown}{BAD}$の中心角は，$360^\circ-248^\circ=112^\circ$ だから，$\angle BCD=112^\circ\times\frac{1}{2}=56^\circ$

OとCを結ぶと，$\angle OCB=x$，$\angle OCD=21^\circ$ より，$x+21^\circ=56^\circ$，$x=35^\circ$

[2]　$\overset{\frown}{AB}$に対する中心角と円周角の関係から，$\angle APQ=\frac{1}{2}a$

△PAQの外角と内角の関係から，$\angle PQO=\frac{1}{2}a+b$

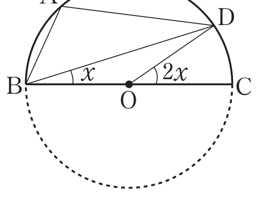
よって，△OBQの外角と内角の関係から，$\angle OBP=\frac{1}{2}a+b-a=-\frac{1}{2}a+b$

[3]

(1)　OとDを結ぶと，$\angle DOC=2x$

よって，$\overset{\frown}{BCD}$に対する中心角は，$2x+180^\circ$ だから，

$\angle BAD=\frac{1}{2}(2x+180^\circ)=x+90^\circ$



(2)　$\angle COD=18^\circ\times2=36^\circ$ より，$\angle BOD=180^\circ-36^\circ=144^\circ$

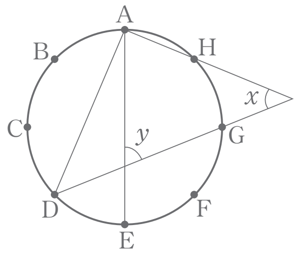
よって，$\angle AOB=144^\circ\times\frac{1}{1+2}=48^\circ$

$\overset{\frown}{AB}$に対する中心角と円周角の関係から，$\angle ADB=48^\circ\times\frac{1}{2}=24^\circ$

第23講・確認テスト

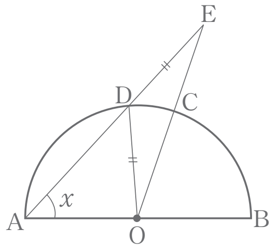
[1]　右の図で，A～Hの各点は円周を8等分する点である。このとき，$\angle x$，$\angle y$の大きさを求めなさい。

$\angle x=$ [アイ] 度，$\angle y=$ [ウエ].[オ] 度



[2]　右の図の半円Oで，線分ABは直径である。半円周上に2点C，Dをとり，OCの延長とADの延長が交わる点をEとする。OD＝DE，$\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CB}=3:2$のとき，$\angle x$の大きさを求めなさい。

$\angle x=$ [カキ] 度



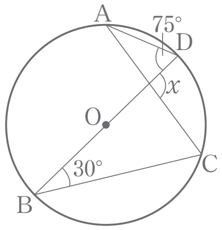
[3]　右の図で，4点A，B，C，Dは円Oの周上の点であり，線分BDは直径である。∠ADB＝75°，∠CBD＝30°のとき，次の問いに答えなさい。

(1)　$\angle x$の大きさを求めなさい。

$\angle x=$ [クケコ] 度

(2)　$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}$を求めなさい。

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=$ [サ]：[シ]：[ス]：[セ]



解答

[1]　ア　4　　イ　5　　ウ　6　　エ　7　　オ　5

[2]　カ　4　　キ　8

[3]　ク　1　　ケ　0　　コ　5　　サ　5　　シ　4　　ス　2　　セ　1

解説

[1]　円周を８等分する弧に対する円周角は，$360°\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=22.5°$

よって，$\angle DAH=22.5°\times4=90°$，$\angle ADG=22.5°\times2=45°$だから，$\angle x=45°$

また，$\angle DAE=22.5°$より，$\angle y=45°+22.5°=67.5°$

[2]　$\angle AOC=180°\times\frac{3}{3+2}=108°$

$\angle ODA=\angle OAD=x$より，$\angle DOE=\angle DEO=\frac{1}{2}x$

また，$\angle AOD=180°-2x$

よって，$180°-2x+\frac{1}{2}x=108°$より，$x=48°$

[3]

(1)　$30°+75°=105°$

(2)　$\angle AOB=75°\times2=150°$，$\angle BOC=180°-30°\times2=120°$

$\angle COD=30°\times2=60°$，$\angle DOA=180°-75°\times2=30°$

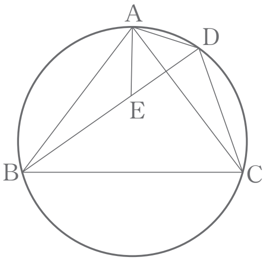
弧の長さは中心角の大きさに比例するから，

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=150°:120°:60°:30°=5:4:2:1$

第24講・確認テスト

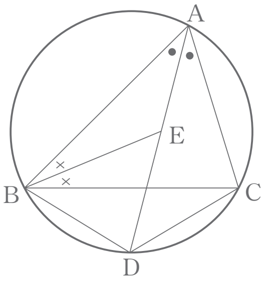
[1]　次の(1)，(2)について，それぞれ［　　］にあてはまるものをあとから選び，記号で答えなさい。ただし，同じ記号を何度使ってもよいものとする。

(1)　右の図で，4点A，B，C，Dは円周上の点で，AB＝ACである。線分BD上に点Eを，BE＝CDとなるようにとるとき，△ABE≡△ACDであることを，次のように証明した。



［証明］　△ABEと△ACDにおいて，
仮定より，AB＝［ア］…①
　　　　　BE＝［イ］…②
［ウ］に対する円周角より，∠ABE＝∠［エ］…③
①，②，③より，［オ］がそれぞれ等しいから，△ABE≡△ACD

(2)　右の図のように，円に内接する△ABCがある。∠BACの二等分線が円周と交わるA以外の点をD，∠ABCの二等分線が線分ADと交わる点をEとする。このとき，DB＝DC＝DEであることを，次のように証明した。



［証明］
［カ］に対する円周角より，∠［キ］＝∠DAC…①
［ク］に対する円周角より，∠［ケ］＝∠DAB…②
仮定より，∠DAC＝∠DAB…③
①，②，③より，∠［キ］＝∠［ケ］
よって，△DBCは二等辺三角形となり，［コ］＝DC…④
また，∠DBE＝∠DBC＋∠［サ］
△［シ］の外角より，∠DEB＝∠DAB＋∠［ス］
①，③より，∠DBC＝∠DAB
仮定より，∠［サ］＝∠［ス］
よって，∠DBE＝∠DEBより，
△［セ］は二等辺三角形となり，DB＝［ソ］…⑤
④，⑤より，DB＝DC＝DE

① AC　② CD　③ DB　④ DE　⑤ $\overset{\frown}{AD}$　⑥ $\overset{\frown}{BD}$　⑦ $\overset{\frown}{CD}$
⑧ ABE　⑨ ACD　⑩ CBE　⑪ DBC　⑫ DBE　⑬ DCB
⑭ ３組の辺　⑮ ２組の辺とその間の角　⑯ １組の辺とその両端の角

解答

[1](1)　ア ①　イ ②　ウ ⑤　エ ⑨　オ ⑮
(2)　カ ⑦　キ ⑪　ク ⑥　ケ ⑬　コ ③　サ ⑩　シ ⑧
ス ⑧　セ ⑫　ソ ④

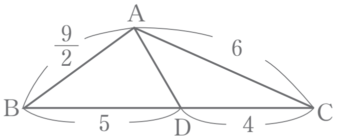
解説

[1](1)　同じ弧に対する円周角は等しいことを利用する。

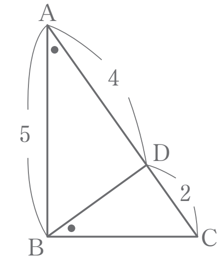
(2)　同じ弧に対する円周角は等しいこと，三角形の外角はそれと隣り合わない２つの内角の和に等しいことを利用して，二等辺三角形を示す。

第25講・確認テスト

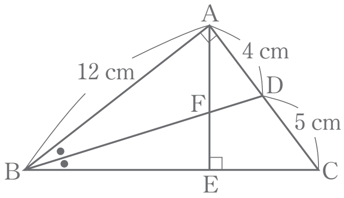
［1］　次の問いに答えなさい。



(1)　右の図において，AB＝$\frac{9}{2}$，AC＝6，BD＝5，CD＝4 である。このとき，AD の長さは［ア］である。



(2)　右の図において，∠BAC＝∠CBD，AB＝5，AD＝4，CD＝2 である。このとき，BC の長さは［イ］$\sqrt{［ウ］}$である。



［2］　右の図の△ABC は，∠BAC＝90°，AB＝12cm の直角三角形である。∠ABC の二等分線が辺 AC と交わる点を D，A から辺 BC にひいた垂線が BC と交わる点を E，BD と AE が交わる点を F とする。これについて，次の問いに答えなさい。

(1)　AF の長さを求めなさい。

AF＝［エ］cm

(2)　BC の長さを求めなさい。

BC＝［オカ］cm

(3)　BE，EF の長さを求めなさい。

BE＝$\frac{［キク］}{［ケ］}$ cm，EF＝$\frac{［コサ］}{［シ］}$ cm

解答

［1］　ア　3　　イ　2　　ウ　3

［2］　エ　4　　オ　1　　カ　5　　キ　4　　ク　8　　ケ　5　　コ　1　　サ　6
　　シ　5

解説

［1］

(1)　△ABC ∽ △DAC より，AB：DA＝BC：AC

よって，$\frac{9}{2}$：DA＝(5＋4)：6，9DA＝27，DA＝3

(2)　△ABC ∽ △BDC より，AC：BC＝BC：DC

よって，(4＋2)：BC＝BC：2，BC^2＝12　BC＞0 より，BC＝$2\sqrt{3}$

［2］

(1)　△ABD ∽ △EBF より，∠ADB＝∠EFB

対頂角より，∠EFB＝∠AFD

よって，∠ADF＝∠AFD より，AF＝AD＝4(cm)

(2)　△DBC ∽ △FBA より，DC：FA＝BC：BA

よって，5：4＝BC：12，BC＝15(cm)

(3)　△ABC ∽ △EBA より，AB：EB＝BC：BA

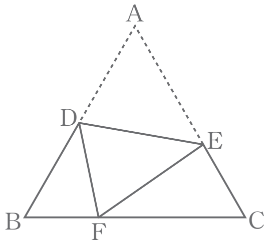
よって，12：EB＝15：12，EB＝$\frac{48}{5}$(cm)

△ABD ∽ △EBF より，AD：EF＝AB：EB

よって，4：EF＝12：$\frac{48}{5}$，EF＝$\frac{16}{5}$(cm)

第 26 講 • 確認テスト

［1］　右の図において，△ABC は正三角形である。辺 AB 上に点 D，辺 AC 上に点 E をとり，線分 DE を折り目として△ABC を折り返したところ，頂点 A が辺 BC 上の点 F に移った。このとき，△BFD ∽△CEF であることを，次のように証明した。［エ］～［カ］にはあてはまる数を答えなさい。また，それ以外の［　］にあてはまるものを下から選び，記号で答えなさい。



［証明］　△BFD と△CEF において，

正三角形の角だから，∠DBF＝∠［ア］＝60°…①

△BFD の内角から，∠［イ］＝180°－(∠［ウ］＋∠DFB)

＝［エオカ］°－∠DFB

3 点 B，F，C は同一直線上にあるから，

∠［キ］＝180°－(∠［ク］＋∠DFB)

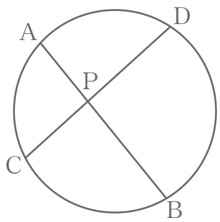
＝［エオカ］°－∠DFB

よって，∠［イ］＝∠［キ］…②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△BFD ∽△CEF

① DBF	② DEF	③ DFE	④ EDA
⑤ EDF	⑥ EFC	⑦ FCE	⑧ FDB

［2］　右の図において，4 点 A，B，C，D は円周上の点であり，P は線分 AB と CD の交点である。このとき，PA×PB＝PC×PD であることを，次のように証明した。［　　］にあてはまるものを下から選び，記号で答えなさい。



証明　A と C，B と D をそれぞれ結ぶ。
△PAC と△PDB において，
［ケ］の円周角より，∠PAC＝∠［コ］…①
対頂角で，∠［サ］＝∠［シ］…②
①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいから，△PAC ∽△PDB
よって，PA：PD＝［ス］：［セ］
比例式の性質より，PA×PB＝PC×PD

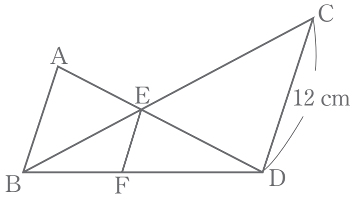
① APC	② APD	③ DAP	④ DPB
⑤ PBC	⑥ PDB	⑦ $\overset{\frown}{AC}$	⑧ $\overset{\frown}{BD}$
⑨ $\overset{\frown}{CB}$	⑩ PB	⑪ PC	⑫ PD

解答

［1］　ア ⑦　イ ⑧　ウ ①　エ 1　オ 2　カ 0　キ ⑥　ク ③
［2］　ケ ⑨　コ ⑥　サ ①　シ ④　ス ⑪　セ ⑩

第27講・確認テスト

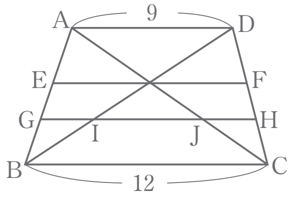
［1］　右の図で，AB // EF // CD，CD＝12cm である。次の問いに答えなさい。



⑴　EF＝4cm のとき，AB＝ ア cm である。

⑵　AB＝8cm のとき，EF＝$\dfrac{\text{イウ}}{\text{エ}}$ cm である。

［2］　右の図で，AD // EF // GH // BC，AG：GB＝2：1 のとき，次の問いに答えなさい。



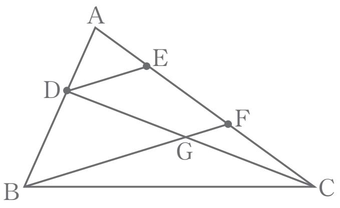
⑴　EF の長さを求めなさい。

EF＝$\dfrac{\text{オカ}}{\text{キ}}$

⑵　GH，IJ の長さを求めなさい。

GH＝ クケ ，IJ＝ コ

［3］　右の図で，点 D は△ ABC の辺 AB 上の点で，AD：DB＝2：3 である。点 E，F はそれぞれ辺 AC 上の点で，DE // BF，EF＝FC である。また，点 G は線分 BF と CD の交点である。BF＝x とするとき，DE，BG の長さを x を用いて表しなさい。



DE＝$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}x$，BG＝$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}x$

解答

［1］　ア　6　　イ　2　　ウ　4　　エ　5

［2］　オ　7　　カ　2　　キ　7　　ク　1　　ケ　1　　コ　5

［3］　サ　2　　シ　5　　ス　4　　セ　5

解説

［1］

⑴　BE：BC＝1：3 より，BE：EC＝1：2

AB：12＝1：2 より，AB＝6(cm)

⑵　BE：EC＝2：3 より，EF：12＝2：(2＋3)，EF＝$\frac{24}{5}$(cm)

［2］

⑴　EF と AC の交点を K とすると，AK：KC＝3：4

よって，EK：BC＝3：(3＋4)，EK：12＝3：7，EK＝$\frac{36}{7}$　同様に，KF＝$\frac{36}{7}$

したがって，EF＝$\frac{36}{7}\times2=\frac{72}{7}$

⑵　GI：AD＝BG：BA＝1：(1＋2)，GI：9＝1：3 より，GI＝3

DH：HC＝AG：GB＝2：1 だから，IH：BC＝DH：DC＝2：3

よって，IH：12＝2：3 より，IH＝8

したがって，GH＝3＋8＝11

JH＝GI＝3 より，IJ＝8－3＝5

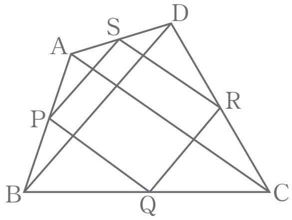
［3］　DE∥BF，AD：DB＝2：3 より，DE：BF＝2：5　よって，DE＝$\frac{2}{5}x$

また，EF＝FC より，DE：GF＝2：1 だから，GF＝$\frac{1}{5}x$

よって，BG＝$\frac{4}{5}x$

第 28 講・確認テスト

［1］　右の図の四角形 ABCD において，4 点 P，Q，R，S はそれぞれ辺 AB，BC，CD，DA の中点である。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　四角形 PQRS は平行四辺形である。これを証明するときの根拠となることがらを下から選ぶと，［ア］である。

①　1 組の向かい合う辺が平行である。

②　対角線が，それぞれの中点で交わる。

③　2 組の向かい合う角がそれぞれ等しい。

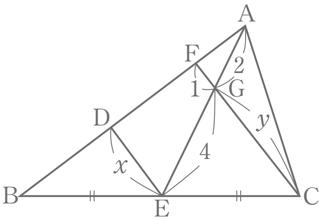
④　1 組の向かい合う辺が等しくて平行である。

(2)　AC⊥BD のとき，四角形 PQRS は［イ］である。また，AC＝BD のとき，四角形 PQRS は［ウ］である。それぞれ適するものを下から選び，記号で答えなさい。

①　台形　　②　ひし形　　③　長方形　　④　正方形

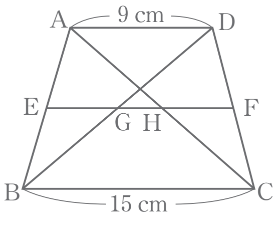
［2］　右の図において，BE＝EC，DE∥FC のとき，x，y の値を求めなさい。

x＝［エ］，y＝［オ］



［3］　右の図において，点 E が辺 AB の中点であり，AD∥EF∥BC，AD＝9cm，BC＝15cm のとき，EF，GH の長さを求めなさい。

EF＝［カキ］cm，GH＝［ク］cm



解答

［1］　ア　④　　イ　③　　ウ　②

［2］　エ　3　　オ　5

［3］　カ　1　　キ　2　　ク　3

解説

［1］

⑴　中点連結定理より，PQ＝$\frac{1}{2}$AC，PQ∥AC

同様に，SR＝$\frac{1}{2}$AC，SR∥AC

よって，PQ＝SR，PQ∥SR

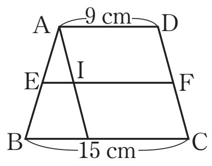
⑵　AC⊥BD のとき，四角形 PQRS は 4 つの角がすべて直角となるので長方形。

AC＝BD のとき，四角形 PQRS は 4 辺がすべて等しくなるのでひし形。

［2］　FG∥DE，AG：GE＝1：2 より，FG：DE＝1：3　よって，x＝3

△BCF において，中点連結定理より，FC＝2DE＝6　よって，y＝5

［3］　右の図のように，A を通り，DC に平行な直線をひく。



中点連結定理より，EI＝$\frac{1}{2}\times(15-9)$＝3(cm)

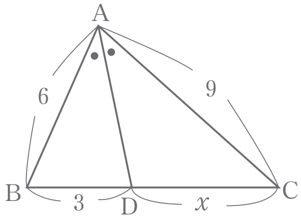
また，IF＝9cm　よって，EF＝12cm

中点連結定理より，EG＝HF＝$\frac{1}{2}\times9=\frac{9}{2}$(cm)

よって，GH＝$12-\frac{9}{2}\times2$＝3(cm)

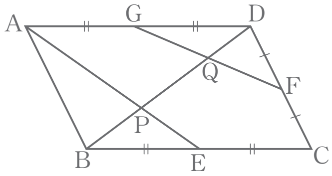
第 29 講 • 確認テスト

[1]　次の問いに答えなさい。



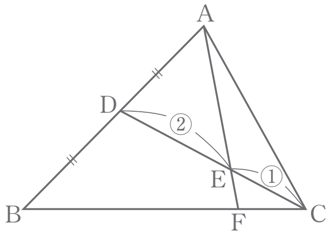
⑴　右の図で，点 D は△ABC の∠BAC の二等分線が辺 BC と交わる点である。このとき，x の値を求めなさい。

$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$



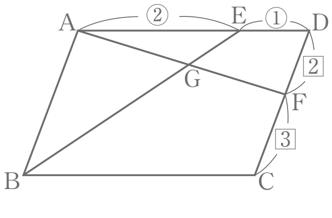
⑵　右の図で，四角形 ABCD は平行四辺形である。辺 BC，CD，DA の中点をそれぞれ E，F，G とし，対角線 BD と AE，GF が交わる点をそれぞれ P，Q とする。BD＝12cm のとき，PQ の長さを求めなさい。

PQ＝[ウ] cm



[2]　右の図の△ABC で，点 D は辺 AB の中点である。線分 CD 上に，CE：ED＝1：2 となる点 E をとり，AE の延長が辺 BC と交わる点を F とする。このとき，BF：FC を最も簡単な整数の比で表しなさい。

BF：FC＝[エ]：[オ]



[3]　右の図の四角形 ABCD は平行四辺形である。2 点 E，F はそれぞれ辺 AD，CD 上の点で，AE：ED＝2：1，DF：FC＝2：3 である。AF と BE の交点を G とする。このとき，次の問いに答えなさい。

⑴　BG：GE を最も簡単な整数の比で表しなさい。

BG：GE＝[カキ]：[ク]

⑵　AG：GF を最も簡単な整数の比で表しなさい。

AG：GF＝[ケコ]：[サ]

解答

［1］　ア　9　　イ　2　　ウ　5

［2］　エ　4　　オ　1

［3］　カ　1　　キ　5　　ク　4　　ケ　1　　コ　0　　サ　9

解説

［1］

⑴　∠BAD＝∠CAD より，BD：CD＝AB：AC＝2：3

よって，3：x＝2：3，$x=\frac{9}{2}$

⑵　△PBE∽△PDA(相似比 1：2) より，BP＝$\frac{1}{3}$BD＝4(cm)

AC と BD の交点を O とすると，△DAC において，中点連結定理より，GF∥AC

よって，△DOC において，DQ：QO＝DF：FC より，DQ＝$\frac{1}{2}$DO＝3(cm)

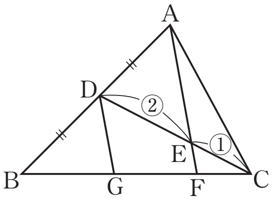
したがって，PQ＝BD－(BP＋DQ)＝5(cm)

［2］　D を通り，AF に平行な直線が BC と交わる点を G とする。

DG∥AF，BD＝DA より，BG＝GF

また，DE：EC＝2：1 より，GF：FC＝2：1

よって，BF：FC＝(2＋2)：1＝4：1



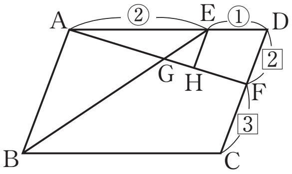
［3］

⑴　右の図のように，E を通り，AB に平行な直線が AF と交わる点を H とする。また，AB＝CD＝x とする。

EH：DF＝AE：AD＝2：3，DF＝$\frac{2}{5}x$ より，

EH＝$\frac{2}{3}$×DF＝$\frac{4}{15}x$

よって，BG：EG＝AB：HE＝x：$\frac{4}{15}x$＝15：4



⑵　AG：GH＝15：4，AH：HF＝AE：ED＝2：1 より，

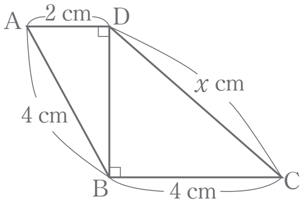
AG：GH：HF＝15：4：$\frac{19}{2}$

よって，AG：GF＝15：$\left(4+\frac{19}{2}\right)$＝10：9

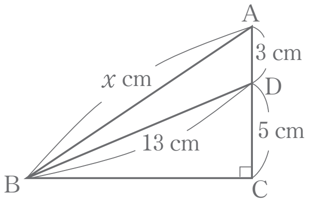
第30講・確認テスト

［1］　次の図で，x の値を求めなさい。

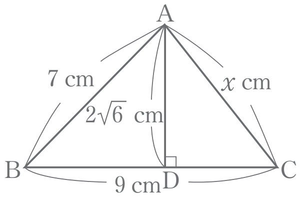
（1）　$x=$ ア $\sqrt{イ}$



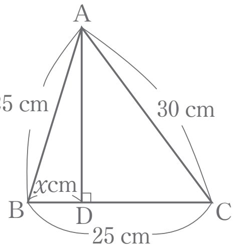
（2）　$x=$ ウ $\sqrt{エオ}$



（3）　$x=$ カ $\sqrt{キク}$



［2］　右の図の△ ABC は，AB＝BC＝25cm，CA＝30cm の二等辺三角形で，A から BC にひいた垂線を AD とする。このとき，次の問いに答えなさい。



（1）　BD＝$x$cm とするとき，AD^2 を x を用いた式で表しなさい。

$AD^2=$ ケコサ $-x^2$

（2）　AD の長さを求めなさい。

AD＝ シス cm

解答

［1］　ア　2　　イ　7　　ウ　4　　エ　1　　オ　3　　カ　2　　キ　1　　ク　0

［2］　ケ　6　　コ　2　　サ　5　　シ　2　　ス　4

解説

［1］

(1)　$DB^2=4^2-2^2=12$，$x=\sqrt{DB^2+BC^2}=\sqrt{12+4^2}=2\sqrt{7}\,(x>0)$ より，$x=2\sqrt{7}$

(2)　$BC^2=13^2-5^2=144$，$x=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{144+8^2}=4\sqrt{13}\,(x>0)$ より，$x=4\sqrt{13}$

(3)　$BD=\sqrt{7^2-(2\sqrt{6})^2}=5\,(BD>0)$，$x=\sqrt{24+(9-5)^2}=2\sqrt{10}\,(x>0)$ より，$x=2\sqrt{10}$

［2］

(1)　△ABD において，三平方の定理より，$AD^2=AB^2-BD^2=625-x^2$

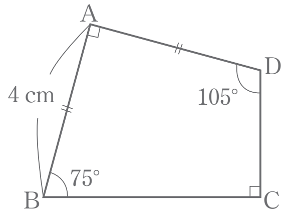
(2)　△ACD において，三平方の定理より，$AD^2=AC^2-CD^2=900-(25-x)^2$

これと(1)より，$900-625+50x-x^2=625-x^2$，$50x=350$，$x=7$

よって，$AD=\sqrt{625-7^2}=24\,(AD>0)$ より，$AD=24$

第31講・確認テスト

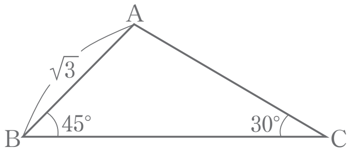
［1］　次の問いに答えなさい。



(1)　右の図で，BC，CD の長さを求めなさい。

$BC = \boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ cm,

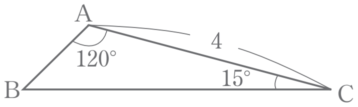
$CD = \boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ cm



(2)　右の図の△ ABC の面積を求めなさい。

$\triangle ABC = \dfrac{\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}} + \boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ cm^2

［2］　右の図の△ABC について，次の問いに答えなさい。



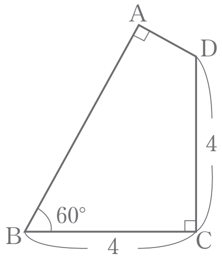
(1)　BA の延長に C からひいた垂線の足を H とするとき，AH，CH の長さを求めなさい。

$AH = \boxed{ケ}$，$CH = \boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$

(2)　AB の長さを求めなさい。

$AB = \boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}} - \boxed{セ}$

［3］　右の図で，AB の長さ，四角形 ABCD の面積を求めなさい。



$AB = \boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}} + \boxed{チ}$

四角形 ABCD＝$\boxed{ツテ}$

解答

［1］	ア　2	イ　6	ウ　2	エ　2	オ　3	カ　3	キ　3	ク　4
［2］	ケ　2	コ　2	サ　3	シ　2	ス　3	セ　2		
［3］	ソ　2	タ　3	チ　2	ツ　1	テ　2			

解説

［1］

(1)　BとDを結ぶ。

△ABD，△BCDはそれぞれ$1:1:\sqrt{2}$，$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形になる。

$BD=4\sqrt{2}$cmより，$BC=\frac{\sqrt{3}}{2}BD=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{6}$(cm)

$CD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (cm)

(2)　AからBCに垂線AHをひくと，

△ABH，△ACHはそれぞれ$1:1:\sqrt{2}$，$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形になる。

$AH=BH=\frac{1}{\sqrt{2}}AB=\frac{\sqrt{6}}{2}$(cm)，$CH=\sqrt{3}AH=\frac{3\sqrt{2}}{2}$(cm)

よって，$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{3}+3}{4}$(cm^2)

［2］

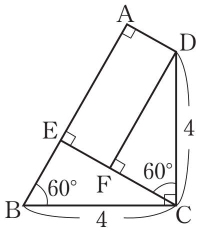
(1)　△ACHは$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形になる。

よって，$AH=\frac{1}{2}AC=2$，$CH=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=2\sqrt{3}$

(2)　$\angle ABC=45^\circ$より，△HBCは$1:1:\sqrt{2}$の直角三角形になる。

よって，$HB=CH=2\sqrt{3}$，$AB=2\sqrt{3}-2$

［3］　右の図のように，2つの直角三角形と1つの長方形に分ける。



△BCE，△CDFは合同で，$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形だから，

$BE=CF=\frac{1}{2}BC=2$，$CE=DF=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=2\sqrt{3}$

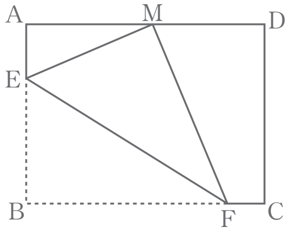
よって，$AB=2\sqrt{3}+2$

また，四角形ABCDは，△BCEを，辺BCが△CDFの辺DCと重なるように移動すると長方形になるから，面積は，

$AE\times CE=2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=12$

第32講・確認テスト

[1]　右の図の四角形 ABCD は，AB＝6，AD＝8 の長方形である。この長方形 ABCD を EF を折り目として，頂点 B が辺 AD の中点 M と重なるように折り返す。次の問いに答えなさい。



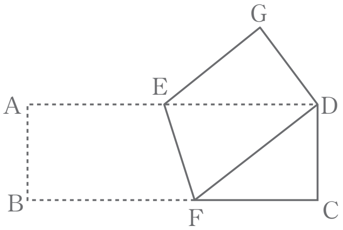
(1)　AE の長さを求めなさい。

AE＝$\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

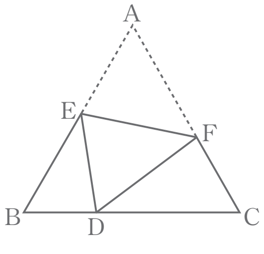
(2)　MF の長さを求めなさい。

MF＝$\frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$

[2]　右の図は，AB＝6cm，BC＝18cm の長方形 ABCD を，頂点 B が頂点 D と重なるように折り返したものである。このときの折り目を EF，頂点 A が移った点を G とすると，FC の長さは $\boxed{カ}$ cm，D から EF にひいた垂線の長さは $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{クケ}}$ cm である。



[3]　右の図の△ ABC は，1 辺が 9cm の正三角形である。辺 BC 上に BD＝3cm となる点 D をとり，頂点 A が D と重なるように折り返す。このときの折り目を EF とする。次の問いに答えなさい。



(1)　BE の長さを求めなさい。

BE ＝$\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ cm

(2)　CF の長さを求めなさい。

CF ＝$\frac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}$ cm

解答

[1]　ア　5　　イ　3　　ウ　1　　エ　3　　オ　2

[2]　カ　8　　キ　3　　ク　1　　ケ　0

[3]　コ　2　　サ　4　　シ　5　　ス　1　　セ　5　　ソ　4

解説

[1]

(1)　AE＝x とすると，ME＝BE＝$6-x$　また，AM＝4

△AEM において，三平方の定理より，$(6-x)^2=x^2+4^2$，$12x=20$，$x=\dfrac{5}{3}$

(2)　M から BC に垂線 MH をひく。

BF＝MF＝y とすると，FH＝$y-4$　また，MH＝6

△MHF において，三平方の定理より，$y^2=(y-4)^2+6^2$，$8y=52$，$y=\dfrac{13}{2}$

[2]　FC＝$x$cm とすると，DF＝BF＝$18-x$(cm) だから，

△DFC において，三平方の定理より，$(18-x)^2=x^2+6^2$，$36x=288$，$x=8$

DG＝DC，∠GDE＝∠CDF，∠DGE＝∠DCF より，△DEG≡△DFC

よって，DE＝DF＝18－8＝10(cm)，$\triangle DEF=\dfrac{1}{2}\times10\times6=30(\text{cm}^2)$

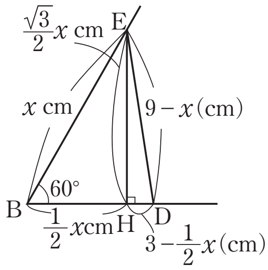
E から BC に垂線 EH をひくと，EH＝6cm，FH＝2cm

△EHF において，三平方の定理より，$EF=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$(cm)

D から EF にひいた垂線の長さを $h$cm とすると，$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times h=30$，$h=3\sqrt{10}$

[3]

(1)　右の図のように，E から BD に垂線 EH をひく。



BE＝$x$cm とすると，BH＝$\dfrac{1}{2}x$cm，EH＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$cm，

DH＝$3-\dfrac{1}{2}x$(cm)，ED＝EA＝$9-x$(cm)

△EHD において，三平方の定理より，

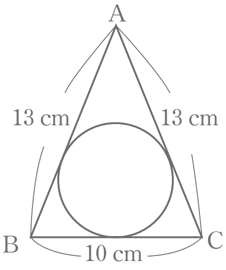
$(9-x)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(3-\dfrac{1}{2}x\right)^2$，$15x=72$, $x=\dfrac{24}{5}$(cm)

(2)　△BDE∽△CFD より，

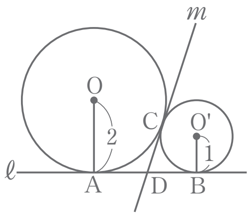
BD：CF＝BE：CD，3：CF＝$\dfrac{24}{5}$：6，$\dfrac{24}{5}$CF＝18，CF＝$\dfrac{15}{4}$(cm)

第33講・確認テスト

[1] 次の問いに答えなさい。

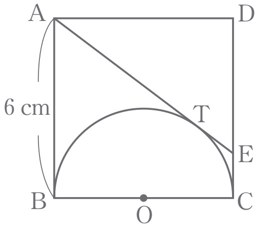


(1) 右の図のように，AB＝AC＝13cm，BC＝10cm の△ABC に円が内接している。この円の半径は $\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ cm である。



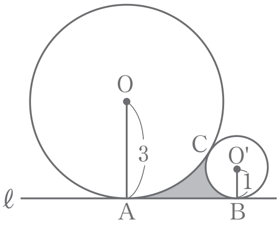
(2) 右の図のように，半径２の円 O と半径１の円 O′が点 C で接している。直線 ℓ は２つの円 O，O′にそれぞれ点 A，B で接する共通外接線であり，直線 m は点 C で２つの円 O，O′に接する共通内接線である。また，点 D は直線 ℓ と m の交点である。このとき，CD の長さを求めなさい。

CD ＝$\sqrt{\boxed{エ}}$



(3) 右の図のように，１辺が 6cm の正方形 ABCD と，その辺 BC を直径とする半円 O がある。線分 AE は半円 O の接線であり，点 T は接点である。このとき，DE の長さを求めなさい。

DE ＝$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ cm

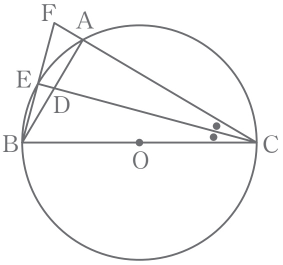


[2] 右の図のように，半径３の円 O と半径１の円 O′が点 C で接している。また，円 O，O′はそれぞれ点 A，B で直線 ℓ と接している。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) AB の長さは $\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}$ である。

(2) 斜線部分の面積は $\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}-\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\pi$ である。

[3]　右の図のように，△ABCが円Oに内接しており，BCは円Oの直径である。∠ACBの二等分線がABと交わる点をD，円周と交わる点をEとする。また，CAの延長とBEの延長が交わる点をFとする。AC=7，BC=8のとき，次の問いに答えなさい。



(1)　ADの長さを求めなさい。

$AD = \dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソタ}}}{\boxed{チツ}}$

(2)　CEの長さを求めなさい。

$CE = \boxed{テ}\sqrt{\boxed{トナ}}$

解答

[1]　ア　1　　イ　0　　ウ　3　　エ　2　　オ　9　　カ　2

[2]　キ　2　　ク　3　　ケ　4　　コ　3　　サ　1　　シ　1　　ス　6

[3]　セ　7　　ソ　1　　タ　5　　チ　1　　ツ　5　　テ　2　　ト　1　　ナ　5

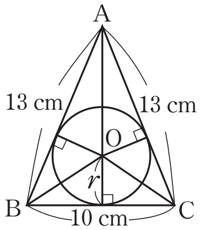
解説

[1]

(1)　内接円の半径を r とする。

右の図より，△OAB＋△OBC＋△OCA＝△ABC

よって，$\frac{1}{2}r(13+10+13)=\frac{1}{2}\times 10\times 12$，$r=\frac{10}{3}$



(2)　O′からOAに垂線O′Hをひく。

$AB=\sqrt{(2+1)^2-(2-1)^2}=2\sqrt{2}$　　AD＝CD＝BDより，$CD=\sqrt{2}$

(3)　DE＝$x$cmとすると，EC＝ET＝$6-x$(cm)，

AE＝$6+(6-x)=12-x$(cm)

△ADEにおいて，三平方の定理より，

$(12-x)^2=6^2+x^2$，$24x=108$，$x=\frac{9}{2}$(cm)

[2]

⑴　O′からOAに垂線O′Hをひく。△OO′Hにおいて，三平方の定理より，

$AB = O'H = \sqrt{(3+1)^2-(3-1)^2} = 2\sqrt{3}$

⑵　△OO′Hは$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形になるから，$\angle AOO' = 60^\circ$，$\angle BO'O = 120^\circ$

求める面積は，台形OABO′－(おうぎ形OAC＋おうぎ形O′BC)だから，

$\frac{1}{2}\times(3+1)\times2\sqrt{3}-\left(9\pi\times\frac{1}{6}+\pi\times\frac{1}{3}\right)=4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi$

[3]

⑴　$AB = \sqrt{8^2-7^2} = \sqrt{15}$

CDは∠ACBの二等分線だから，AD：BD＝AC：BC

よって，$AD = \frac{7}{7+8}\times\sqrt{15} = \frac{7\sqrt{15}}{15}$

⑵　EC共通，∠ECF＝∠ECB，∠CEF＝∠CEB＝90°より，

△ECF≡△ECB　よって，CF＝CB＝8だから，AF＝1

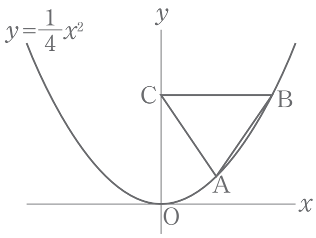
△ABFにおいて，三平方の定理より，$BF = \sqrt{1^2+(\sqrt{15})^2} = 4$

∠BCE＝∠FBA，∠CEB＝∠BAF＝90°より，△ECB∽△ABF

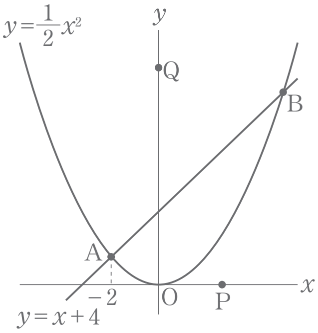
よって，EC：AB＝CB：BF，$EC:\sqrt{15} = 8:4$，$EC = 2\sqrt{15}$

第34講・確認テスト

［1］　右の図で，放物線は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。2 点 A，B はこのグラフ上の点，点 C は y 軸上の点であり，線分 BC は x 軸に平行である。△ABC が正三角形となるとき，点 A の x 座標は $\frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$ である。ただし，点 A の x 座標は正とする。



［2］　右の図で，放物線は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ，直線は関数 $y=x+4$ のグラフである。2 点 A，B は，放物線と直線の交点で，A の x 座標は -2 である。また，x 軸上の点を P，y 軸上の点を Q とする。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　点 B の座標は，($\boxed{エ}$ ， $\boxed{オ}$) である。

(2)　△PABが PA＝PB の二等辺三角形となるとき，P の x 座標は $\boxed{カ}$ である。

(3)　PA＋PBの長さが最小となるとき，P の x 座標は $-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

(4)　△ABQが∠AQB＝90°の直角三角形となるとき，Q の y 座標は $\boxed{ケ}\pm\sqrt{\boxed{コサ}}$ である。

解答

［1］　ア　4　　イ　3　　ウ　3

［2］　エ　4　　オ　8　　カ　6　　キ　4　　ク　5　　ケ　5　　コ　1　　サ　7

解説

［1］　A の x 座標を t とすると，$A\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$　また，$B(2t,\ t^2)$

A から BC に垂線 AH をひくと，AH:BH$=\sqrt{3}:1$ だから，

$\left(t^2-\frac{1}{4}t^2\right):(2t-t)=\sqrt{3}:1$,

$\frac{3}{4}t^2:t=\sqrt{3}:1$,

$\frac{3}{4}t^2=\sqrt{3}\,t$　$t\left(t-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=0$，$t>0$ より，$t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

［2］

(1)　B の x 座標を t とすると，$\frac{1}{2}(-2+t)=1$，$t=4$

よって，B(4，8)

(2)　AB の中点の座標は (1，5)

点 (1，5) を通り，$y=x+4$ と垂直に交わる直線の式は，$y=-x+6$

点 P は $y=-x+6$ が x 軸と交わる点になるから，P(6，0)

(3)　x 軸について A と対称な点を A′とすると，A′(−2，−2)

直線 A′Bが x 軸と交わる点を P とするとき，PA＋PB の長さが最小となる。

直線 A′Bの式は，$y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}$だから，P の x 座標は，$-\frac{4}{5}$

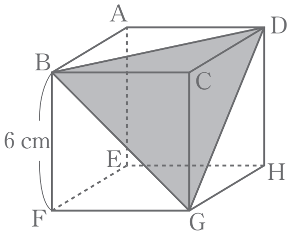
(4)　Q の y 座標を u とすると，$QA^2+QB^2=AB^2$ より，

$\{2^2+(u-2)^2\}+\{4^2+(u-8)^2\}=(4+2)^2+(8-2)^2$,

$u^2-10u+8=0$，$u=5\pm\sqrt{17}$

第35講・確認テスト

[1]　右の図の立体 ABCD－EFGH は，1 辺が 6cm の立方体である。この立方体を，3 点 B，D，G を通る平面で切断するとき，次の問いに答えなさい。

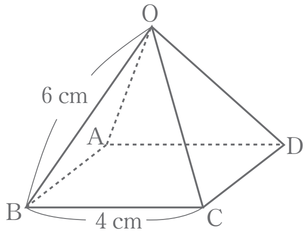


(1)　切断面の△ BDG の面積は［アイ］$\sqrt{［ウ］}$ cm^2 である。

(2)　頂点 C から面 BDG にひいた垂線の長さは

［エ］$\sqrt{［オ］}$ cm である。

[2]　右の図のような，OA＝OB＝OC＝OD＝6cm，AB＝BC＝CD＝DA＝4cm の正四角錐 O－ABCD がある。これについて，次の問いに答えなさい。



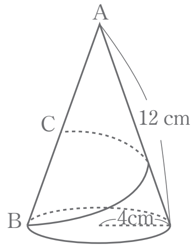
(1)　この立体の表面積は

［カキ］$\sqrt{［ク］}$＋［ケコ］(cm^2)である。

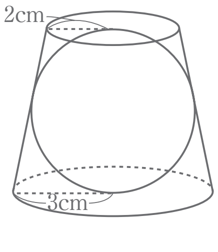
(2)　この立体の体積は $\dfrac{［サシ］\sqrt{［ス］}}{［セ］}$ cm^3 である。

[3]　右の図は，母線 AB の長さが 12cm，底面の半径が 4cm の円錐である。AB の中点を C とし，B から C まで円錐の側面を 1 周するようにひもをかける。ひもの長さが最も短くなるときのひもの長さは

［ソ］$\sqrt{［タ］}$ cm である。



[4]　右の図のように，底面の半径が 3cm の円錐を，底面に平行な平面で切ったところ，切り口の円の半径が 2cm となった。この立体に球が内接しているとき，この球の半径は $\sqrt{［チ］}$ cm である。



解答

［1］　ア　1　　イ　8　　ウ　3　　エ　2　　オ　3

［2］　カ　3　　キ　2　　ク　2　　ケ　1　　コ　6　　サ　3　　シ　2　　ス　7
　　　セ　3

［3］　ソ　6　　タ　7

［4］　チ　6

解説

［1］

(1)　切断面は正三角形で，1辺は $6\sqrt{2}$ cm

よって，$\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times6\sqrt{2}\right)=18\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2)$

(2)　三角錐 C－BDG の体積は，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times6\right)\times6=36(\mathrm{cm}^3)$

C から面 BDG にひいた垂線の長さを h とすると，

$\frac{1}{3}\times18\sqrt{3}\times h=36$，$h=2\sqrt{3}$

［2］

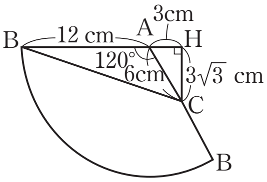
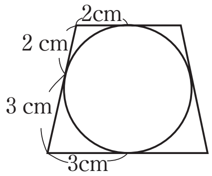
(1)　O から BC にひいた垂線の長さは，$\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$ だから，

$\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}\times4+4\times4=32\sqrt{2}+16(\mathrm{cm}^2)$

(2)　O から底面にひいた垂線の長さは，$\sqrt{(4\sqrt{2})^2-2^2}=2\sqrt{7}\,(\mathrm{cm})$ だから，

$\frac{1}{3}\times16\times2\sqrt{7}=\frac{32\sqrt{7}}{3}(\mathrm{cm}^3)$

［3］　右の図より，$\mathrm{BC}=\sqrt{(12+3)^2+(3\sqrt{3})^2}=6\sqrt{7}\,(\mathrm{cm})$



［4］　右の図より，球の半径は，$\frac{1}{2}\times\sqrt{(3+2)^2-(3-2)^2}=\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$